В. Ф. КАТАН

ЛОБАЧЕВСКИЙ

.....

ОШИВКИ .....

.....

ость заказа .....

ок .....

примерки .....

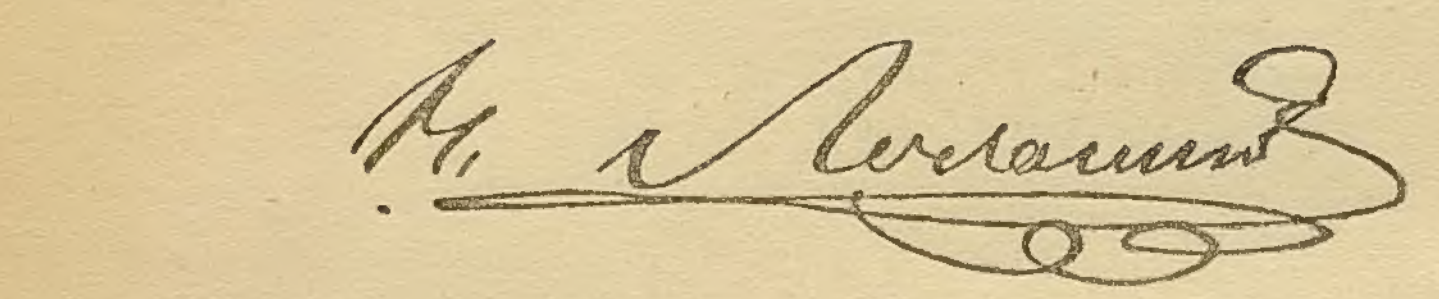
изготовления .....

Заказ принял .....

Заказ сдал .....

АКАДЕМИЯ
НАУК
СОЮЗА
ССР

1792
1856



АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

БИОГРАФИИ

51:92
К-56

Профессор
В. Ф. КАГАН

ЛОБАЧЕВСКИЙ

154306.

88038273 Б-ка АП РФ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва-Ленинград
1944

Под общей редакцией Комиссии АН СССР по изданию
научно-популярной литературы
Председатель Комиссии академик *В. Л. КОМАРОВ*
Зам. председателя академик *С. И. ВАВИЛОВ*
Зам. председателя чл.-корр. АН СССР *П. Ф. ЮДИН*

Ответственный редактор
академик *С. Л. СОБОЛЕВ*

ВВЕДЕНИЕ

Со дня смерти Н. И. Лобачевского прошло почти девяносто лет, но уже через пятнадцать лет после его кончины имя его было на устах математиков всего мира; и все же сведения о жизни Лобачевского довольно скудны. Первым кратким его жизнеописанием была брошюра, принадлежащая покойному профессору Казанского университета Э. П. Янишевскому и воспроизводящая в расширенном виде речь, которую автор произнес на торжественном заседании Казанского университета 5 (17) ноября 1868 г.;[1] это было первое заседание, посвященное памяти великого геометра, после того, как имя его появилось на страницах европейской печати. Составленная лицом, работавшим в Казанском университете при жизни Лобачевского, тщательно собравшим для нее материал, эта брошюра и по настоящее время сохраняет для жизнеописания Н. И. Лобачевского основное значение.

Жизнь Н. И. Лобачевского была тесно сплетена с историей Казанского университета в первые пятьдесят лет со дня его основания; поэтому материалы по истории этого университета содержат много данных и для его биографии. Два капитальных труда играют в этом отношении основную роль: первый принадлежит профессору Казанского

---

[1] Э. П. Янишевский. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Казань, 1868. Брошюра была, повидимому, выпущена в весьма небольшом числе экземпляров и потому мало доступна. В следующем 1869 году эта речь появилась во французском переводе А. Потоцкого (Bull. bibliogr. storia sc. mat. fis., II).

университета Н. Н. Буличу,[1] второй — профессору того же университета Н. П. Загоскину.[2]

Труд Булича доведен только до 1819 г.; хотя он составлен главным образом по архивным материалам. но написан живо и читается с неослабевающим интересом. Короче, но еще живее эта эпоха описана в другом сочинении того же автора, посвященном истории русского просвещения.[3] Очерк охватывает и следующие семь лет, т. е. доведен до 1826 г. К интересующей нас истории Казанского университета и жизни Лобачевского относятся лекции XXV—XXVI.

Сочинение Н. П. Загоскина составлено им в связи с исполнившимся в 1904 г. столетием Казанского университета, по поручению совета университета. Автор посвятил много сил и времени разбору архивов Казанского университета и попечителя Казанского учебного округа, а также других материалов; работа задумана очень широко, может быть слишком широко: четыре больших тома охватывают только период с 1804 г. по 1827 г.; поэтому, повидимому, она и прервалась. Сочинение Загоскина содержит очень обстоятельное изложение истории возникновения и жизни Казанского университета за первую четверть века его существования. Во всех четырех томах мы находим много сведений о первой половине жизни Н. И. Лобачевского. Сведения эти составлены по архивным материалам, отрывочным, но тщательно проверенным.

Из статей, специально посвященных жизнеописанию Лобачевского, значительный интерес представляют воспоминания его сына,[4] (впрочем очень скудные и не всегда надежные), его ученика А. Ф. Попова, сменившего Лобачевского на кафедре,[5] и профессора Н. П. Вагнера, зани-

---

[1] Н. Н. Булич. Из первых лет Казанского университета (1805—1819), Казань, ч. I, 1887; ч. II, 1891.

[2] Н. П. Загоскин. История Казанского университета. Казань, т. I, 1902; т. II, 1903; т. III, 1904; т. IV, 1906.

[3] Н. Н. Булич. Очерки по истории русской литературы и просвещения с начала XIX в. СПб., т. I, 1902; т. II, 1905.

[4] Воспоминания о Н. И. Лобачевском. Со слов его сына Н. Н. Лобачевского. «Исторический вестник», т. IX, 1895. — Воспоминания записаны лицом, не указывающим своего имени, но называющим себя учеником Н. И. Лобачевского.

[5] А. Ф. Попов. Воспоминания о службе и трудах профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. «Ученые записки Казанского университета», 1857, кн. IV.

мавшего кафедру зоологии в Казанском университете (автора знаменитых «Сказок Кота-мурлыки»).[1]

Наибольшая заслуга в деле освещения жизни и личности Н. И. Лобачевского, а также увековечения его памяти принадлежит покойному профессору Казанского университета А. В. Васильеву. Две его речи — одна 22 октября 1893 г.[2] на торжественном собрании Казанского университета по случаю столетия со дня рождения Лобачевского и другая в день открытия памятника ему 1 сентября 1896 г.[3] — получили широкое распространение.

В 1898 г. профессор Лейпцигского университета Ф. Энгель выпустил в немецком переводе две важнейшие работы Лобачевского с обстоятельными примечаниями к ним.[4] Книга заканчивается довольно подробной биографией Лобачевского. Она составлена частью на основании упомянутого выше жизнеописания Яншевского, главным же образом — на основе материалов, которые ему собрал и сообщил А. В. Васильев. Не будет преувеличением сказать, что эта биография представляет собой совместное произведение Ф. Энгеля и А. В. Васильева.

Более обстоятельно, чем в перечисленных выше речах, жизнь Лобачевского обрисована А. В. Васильевым в очерке, помещенном в «Русском биографическом словаре» и выпущенном отдельным изданием в 1914 г.[5] В распоряжении А. В. Васильева находилась еще небольшая рукопись неизвестного автора, посвященная жизнеописанию Н. И. Лобачевского. Эта рукопись была найдена в бумагах П. И. Котельникова, состоявшего профессором механики в Казанском университете с 1835 г. до своей кончины в 1879 г. Судьба этой рукописи в настоящее время неизвестна.

Многочисленные речи и брошюры, посвященные жизнеописанию Лобачевского, почти все составлены на основа-

---

[1] Н. П. Вагнер. Из жизни великого геометра. Журнал «Книжки Недели». СПб., 1894, март.

[2] А. В. Васильев. Николай Иванович Лобачевский. Речь опубликована в юбилейном издании «Празднование Казанским университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского». Казань, 1894; выпущена также отдельной брошюрой.

[3] А. В. Васильев. Значение Н. И. Лобачевского для Казанского университета. Казань, 1896.

[4] Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen. Aus dem russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Fr. Engel. Leipzig, 1898.

[5] А. В. Васильев. Николай Иванович Лобачевский. СПб., 1914.

нии материалов и указаний А. В. Васильева. Этими указаниями немало пользовался и автор настоящего труда.

В начале 30-х годов в портфеле Государственного издательства находилось и более обширное сочинение А. В. Васильева «Жизнь и научное дело Лобачевского», но оно осталось неизданным.

Это сочинение было даже набрано, но за смертью автора не появилось в свет. Рукописный экземпляр его хранится в Библиотеке имени Горького Московского государственного университета. Сохранилось также несколько корректурных оттисков. Экземпляр оттиска, хотя и неполный, находится также в распоряжении автора настоящей книги. В отношении жизнеописания этот труд мало прибавляет к опубликованному Васильевым в других его статьях; интересен, однако, обильный справочный материал.

Статьи и заметки меньшего значения, которыми автор настоящего труда пользовался для жизнеописания Н. И. Лобачевского, приведены в тексте; наиболее важные — в списке литературы в конце книги.

Рукописное наследие Н. И. Лобачевского состоит из оригиналов некоторых его печатных произведений, частью рукописных, частью литографированных, — из тетради большого формата и ряда листов, содержащих разнообразные математические записи; сохранилось также небольшое число писем к его родственнику по жене И. Е. Великопольскому и к попечителю Казанского округа графу М. Н. Мусину-Пушкину. Весь этот материал хранился в библиотеке Казанского университета; по просьбе автора настоящей книги, в связи с работами по изданию полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, он передан во временное пользование Библиотеке имени Горького Московского государственного университета. Изучению как этого наследия, так и архивных материалов, имеющих отношение к Н. И. Лобачевскому, посвятили много труда и времени профессора Казанского университета — ныне покойные Н. Н. Парфентьев и П. А. Широков.

ДЕТСКИЕ И СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ

I. Детские и школьные годы Лобачевского

Относительно первых лет жизни Н. И. Лобачевского мы располагаем лишь самыми скудными сведениями. Первый его биограф Э. П. Янишевский сообщает, что Лобачевский родился в 1793 г.; датой дня его рождения Янишевский, очевидно, не располагал, хотя, по собственным его словам, он очень тщательно изучил архивные материалы Казанского университета. Н. П. Загоскин указывает,[1] что Лобачевский родился 22 октября (3 ноября) 1793 г. Откуда эта дата Загоскиным заимствована, не известно; эта дата была принята также А. В. Васильевым и перешла во все дальнейшие исследования, посвященные жизнеописанию Лобачевского. Не было выяснено и место его рождения. По указанию Янишевского, он родился в Макарьевском уезде Нижегородской губернии, а А. Ф. Попов называет местом его рождения самый город Макарьев. Между тем А. В. Васильев сообщает, что Лобачевский родился в Нижнем-Новгороде, и ссылается при этом на упомянутую выше анонимную рукопись, найденную в литературном наследии П. И. Котельникова.

В настоящее время, благодаря тому что в г. Горьком архивы сконцентрированы в одном управлении, удалось найти документы, устанавливающие место и время рождения Лобачевского. Архивное бюро Горьковской

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, стр. 302.

области сообщило Академии Наук СССР, что в метрической книге Алексеевской церкви г. Нижнего-Новгорода имеется запись, согласно которой у регистратора Ивана Максимова 20 ноября 1792 г. родился и 25 ноября крещен сын Николай. Профессор А. П. Котельников, специально для этого ездивший в Горький, проверил это сообщение и нашел его правильным. Нужно считать поэтому, что Н. И. Лобачевский родился в Нижнем-Новгороде 20 ноября (2 декабря) 1792 г.

При всем том, поскольку фамилии Лобачевского в записи Алексеевской церкви за этот год нет (она появляется позже), дату рождения Лобачевского еще нельзя считать окончательно установленной. Сообщения Горьковского архивного бюро содержат еще дополнительные сведения о происхождении Н. И. Лобачевского; но эти сведения еще нуждаются в тщательной проверке.

Нет, все же, уверенности, что первые годы жизни Лобачевского протекли в Нижнем-Новгороде. А. Ф. Попов находился в тесном общении с Лобачевским и вероятно от него самого получил сведения, что первые годы своей жизни он провел в г. Макарьеве.

Об отце Н. И. Лобачевского, Иване Максимовиче, мы также располагаем очень скудными сведениями. Есть основания считать, что он был выходцем из Западного края. Хотя это подтверждает и дочь Н. И. Лобачевского, но документальных данных об этом А. В. Васильеву разыскать не удалось. И. М. Лобачевский несомненно был мелким чиновником, не из дворян, так как в школьных записях его дети, братья Лобачевские, всегда указываются среди разночинцев. По сообщению Попова, он был архитектором, а по сведениям Загоскина — уездным землемером. Последнее правдоподобнее, так как архитектор вряд ли мог быть очень бедным. Между тем Попов сообщает, что Николай Иванович был сыном «беднейшего семейства». «Бедность и недостатки, — рассказывает Янишевский, — окружали колыбель Лобачевского».

В 1797 г., когда Николаю было около пяти лет, отец его скончался; дети — Николай и два его брата, Александр шести лет и Алексей четырех лет, — остались на попечении матери. Прасковья Александровна Лобачевская была женщиной хотя и мало образованной, но очень рассудительной и энергичной. Повидимому, для того чтобы дать своим детям возможно лучшее образование, она ре-

шила переехать в Казань. Точных сведений о том, когда этот переезд совершился, долго ли семья Лобачевских прожила в Казани, мы не имеем, не знаем и того, как и на какие средства она в эти годы жила.

Казань в то время была крупным административным и торговым центром восточной России не только как центр Волжско-Камского края, но и как единственный путь, через который шла торговля со всей северо-восточной Россией и Сибирью, а также с чужими странами Востока. В Казани были сосредоточены почти все культурные учреждения восточной России; в то же время весь ее внешний облик и быт были еще отмечены печатью некультурности. Это был большой и оживленный город, очень живописный и, по отзывам современников, производивший очень красочное впечатление.[1] Его ярко описывает С. Т. Аксаков, вспоминая свое детство, когда он во время болезни наблюдал город из окна больницы, помещавшейся на горе; в таких же тонах изображают его и иностранцы, посетившие Казань в начале XIX в. (Турнерелли и Густав Розе, сопровождавший Гумбольдта в его путешествии через Казань в 1815 г.); особенно живописны были древние храмы, христианские и магометанские, которых в городе было много. Однако при более близком наблюдении картина города резко менялась.

Вот как описывает Казань Браун, приехавший туда в качестве профессора университета в мае 1807 г.

«Город очень велик, так что по объему не уступит Вене, но так раскинут по холмам и долинам, что в самом городе есть площади, напоминающие степи. Холмы большею частью состоят из глины: между ними водою вымыло глубокие овраги... При здешних сильных жарах вода загнивает и делает очень нездоровыми прилежащие части города. Дома по большей части выстроены из дерева, без этажей, притом весьма некрасивы и неудобны. Очень часто делаются они добычей пламени... Немногие каменные дома непрочны. Все они выстроены из кирпича, сделанного

---

[1] М. П и н е г и н. Казань в ее прошлом и настоящем. СПб., 1890; «Старая и новая Казань». Сборник под редакцией проф. С. П. Сингалевича. Казань, 1927; П. Д у л ь с к и й. Памятники казанской старины. Казань, 1914. — Последние две книги представляют собой, собственно, путеводители для экскурсантов, но составлены живо и интересно.

из одной глины и только наполовину высушенного, почему он скоро выветривается, а дома имеют вид развалин. Только в крепости есть небольшой кусочек мостовой, все же остальные улицы не вымощены. При сухой погоде можно еще ходить пешком, но в дождь и осенью нельзя обойтись без экипажа, особенно в низких частях города, куда стекает вся вода и где грязь подымается до самых осей дрожек. Как скоро, однако, вода стекла, размягченная глина так пристает к колесам, что пара лошадей с большим трудом вытаскивает экипаж».

Население Казани в начале XIX в. насчитывало 20—25 тысяч человек; четвертую часть его составляли татары, занимавшие особую часть города за Булаком — речкой, обращенной в канал; от русского населения они были почти совершенно отделены. Из господствующих классов здесь преобладало среднее и мелкопоместное дворянство; очень знатных и богатых дворянских семейств в Казани того времени было весьма мало. Но в ту пору все эти помещики жили очень привольно: переживания, которые были связаны с восстанием Пугачева, протекавшим в Казанской губернии очень бурно, были скоро забыты; казанское дворянство вело оживленную светскую жизнь. «Для тех, кто чувствует себя счастливым лишь на пирах и празднествах, кто любит разъезжать по балам, делать и принимать визиты, — пишет Турнерелли,[1] — для тех, наконец, кому для счастья нужны шумные удовольствия, Казань настоящее Эльдорадо; я смело могу утверждать, что нет другого города в мире, где бы чаще устраивались собрания для веселия, где бы больше обнаруживалось соревнование в устройстве пиров и удовольствий. Через неделю по приезде помещиков из деревень в город начиналось всеобщее устройство балов и журфиксов».

Однако при некотором внешнем лоске даже эта среда была мало культурна. Еще менее культурно, в более грубых формах, но в таком же, если не в большем довольстве протекала жизнь богатого и среднего купечества, которого при торговом значении Казани здесь было много.

Обездоленными были разночинцы — мелкие чиновники и

---

[1] Э. Турнерелли — англичанин, лингвист и художник, преподававший в Казанском университете в течение нескольких лет английский язык. Он выпустил очень интересный альбом «Виды Казани, рисованные с натуры».

служащие частных предприятий. Большинство из них вело жизнь тяжелую, часто связанную с большими лишениями. К числу их принадлежала и семья Лобачевских. Трудно даже уяснить себе (мы уже об этом упоминали), как, на какие средства семья существовала первые годы после смерти Ивана Максимовича; верно только то, что о своей бедности Прасковья Александровна говорит даже в своем письме к ректору университета в 1805 г.

Привезенный в Казань ребенком, Н. И. Лобачевский провел в этом городе всю свою жизнь и не только создал ему и его университету всемирную известность своим научным творчеством, но своей административной деятельностью оставил глубокий след на всей его культурной жизни и даже на его внешнем облике.

Как уже сказано, несмотря на низкий в общем культурный уровень населения, Казань для огромного края, простиравшегося на восток от Москвы до самого Тихого океана, все же была основным культурным центром. Учебные заведения Казани до середины XVIII в. были почти исключительно духовные; как и на всем Востоке России, они создавались царским правительством главным образом с целью вовлечения магометанского и языческого населения в православие. Преобладающими были церковные начальные школы; но некоторые духовные учебные заведения стояли на довольно высоком уровне, как, например, Семинария, или «Школа славяно-латинская», основанная в Казани в 1732 г. по типу Киевской академии. Кроме того, имелось небольшое количество школ специального характера, как «Цыфирная школа», «Батальонная школа». В общем, образование, которое давали все эти учреждения, было односторонним и большею частью совершенно ничтожным.

В 1759 г. в Казани было основано общеобразовательное учебное заведение нового и более высокого типа — гимназия, в которой впоследствии и получил среднее образование Н. И. Лобачевский. Учреждение ее было связано с открытием незадолго перед тем (в 1755 г.) Московского университета и при нем двух гимназий для подготовки будущих студентов; уже в следующем 1756 г. университет сделал представление Сенату о том, что «для размножения наук необходимо надобно учредить, кроме Москвы и Петербурга, гимназии, в которых бы молодые люди, оказующие успехи своего понятия и учения, могли выходить

в Московский университет и Петербургскую Академию для обучения наук, получив в том месте первые основания».[1] Это представление Сенат утвердил, и первая гимназия, открытая в результате его, была казанская. Точнее говоря, в Казани были открыты две гимназии — одна для дворян, другая для разночинцев; сословное разделение учащихся признавалось тогда совершенно необходимым условием, а указ Сената предусматривал обучение и дворян и разночинцев. Образование, которое давала гимназия в этот первый период своего существования, было скудно и отличалось поверхностным, светским направлением. Вот что рассказывает об этом в своих «Записках» знаменитый поэт Г. Р. Державин, принятый в дворянскую гимназию при первом же наборе (правда, не без затруднений, из-за отсутствия достаточных документов о дворянском его происхождении).[2]

«Поелику же в 1758 г. открылась в Казани гимназия..., — пишет Державин, — записаны дети [т. е. сам поэт и его брат] в сие училище, в котором преподавалось учение языкам: латинскому, французскому, немецкому; арифметике, геометрии, танцеванию, музыке, рисованию и фехтованию, под дирекциею бывшего тогда асессором Михаила Ивановича Веревкина; однако же, по недостатку хороших учителей, едва ли с лучшими правилами, как и прежде.[3] Более же всего старались, чтоб научить читать, писать и говорить сколько-нибудь по грамматике и быть обходительным, заставляя сказывать на кафедрах сочиненные учителем и выученные наизусть речи; также представлять на театре бывшие тогда в славе Сумарокова трагедии, танцевать и фехтовать в торжественных собраниях по случаю экзаменов; что сделало питомцев хотя в науках неискусными, однако же доставило людскость и некоторую развязь в обращении».

Ничтожные результаты этого обучения, которые Державин рисует далее в еще более мрачных красках, достаточно объясняются уже тем, что гимназия состояла всего из четырех классов, причем в первый принимались почти

---

[1] А. А. Артемьев. Казанские гимназии в XVIII столетии. Журн. Мин. нар. просв., 1874, CLXXIII, май; CLXXIV, июль; CLXXVI, ноябрь; В. Владимиров. Историческая записка о первой казанской гимназии. Казань, 1867.

[2] Записки Гавриила Романовича Державина. Москва, 1860, стр. 9.

[3] Т. е. лучше, чем они учились дома.

безграмотные дети. К этому присоединялись трудности, связанные с недостатком средств и пособий, отсутствием серьезно подготовленных учителей, частой сменой директоров. Более пятнадцати лет обе гимназии влачили в этих условиях жалкое существование. В 80-х же годах, уже после восстания Пугачева и его подавления, Казанская двойная гимназия пришла в полный упадок. Дело в том, что в связи с открытием в Казани «народного училища» на средства местного Приказа общественного призрения гимназия также была изъята из ведения Московского университета и передана в этот Приказ. Московский университет обиделся и совершенно отвернулся от своего детища, даже потребовал возвращения всех книг, которые им были посланы в гимназическую библиотеку. Предоставленные самим себе, т. е. оставленные без средств, обе гимназии продержались еще около трех лет и в 1788 г. вовсе прекратили существование.

Но дворянство, конечно, не удовлетворялось народным училищем в качестве единственной формы средней школы, в которой сословия сливались и к тому же преподавался только один немецкий язык; ни одному из предметов, важных для военной службы — этого главного поприща дворянского сословия, в нем не обучали. Поэтому в 1798 г., по ходатайству казанского генерал-губернатора князя Мещерского, гимназия снова была открыта. В восстановленной гимназии преподавание было поставлено на более широкую ногу; гимназия должна была приготовлять молодых людей и к гражданской и к военной службе, но не «к состоянию, отличающему ученого человека» (т. е. не имела целью готовить будущих ученых).

Кроме первоначальных и общих предметов гимназического учения здесь преподавались языки — латинский, французский, немецкий и, как это было и в прежней гимназии, татарский; из философских наук — логика и практическая философия; из физико-математических — геометрия и тригонометрия, механика, гидравлика, физика, химия, натуральная история, землеведение (т. е. землемерие) и гражданская архитектура; из юридических — практическое законоискусство; из военных — артиллерия, фортификация, тактика и, наконец, искусства — рисование, музыка, фехтование и танцы. Из простого перечня преподаваемых предметов уже видно, что новая гимназия более соответствовала вкусам и потребностям привилегированных слоев

и давала разностороннюю подготовку к жизни и к службе как военной, так и гражданской.

Гимназия получила теперь наименование императорской, ей была отдана Потемкинская библиотека, хранившаяся в Новороссийске и содержавшая множество редких и ценных книг и рукописей. Кроме того, в гимназическую библиотеку поступило большое собрание книг Полянского, известного своим путешествием за границу. Детям разночинцев обучение в гимназии воспрещено не было, однако их всячески отмежевывали от дворянских детей.

Крупное просветительное учреждение обычно уже в самом начале своего существования привлекает в качестве первых питомцев людей, впоследствии знаменитых, как бы ожидавших его открытия. Так, известный Царскосельский лицей в первые годы своего существования принял в свои стены Пушкина, Дельвига, Кюхельбекера, Пущина. — Подобно этому и гораздо более скромное учебное заведение — возобновленная Казанская гимназия — при самом своем открытии привлекло немало учащихся, сделавшихся со временем выдающимися людьми: братьев Княжевичей, братьев Панаевых, С. Т. Аксакова, двух Перевощиковых. К числу учащихся, поступивших в возобновленную гимназию в первые годы ее существования, принадлежал также и самый выдающийся из ее воспитанников — Н. И. Лобачевский.

Восстановление Казанской гимназии произошло очень скоро после кончины И. М. Лобачевского; вряд ли можно сомневаться, что именно это обстоятельство и склонило Прасковью Александровну переехать в Казань. Однако Николаю тогда было только пять, а младшему ее сыну Алексею только четыре года; об устройстве их в гимназию еще не могло быть и речи. В конце 1802 г. Прасковье Александровне удалось определить в гимназию на казенное содержание всех трех сыновей: они были зачислены одновременно 5 (17) ноября. Весьма вероятно, что мать и привезла их в Казань незадолго до того; в противном случае, казалось бы, она могла старшего определить в гимназию раньше. Не следует недооценивать энергию матери и ее стремление к образованию детей, так как тяга в гимназию в то время отнюдь не была велика ни среди дворян, ни среди разночинцев: первые стремились обыкновенно скорее зачислить детей на военную службу, вторые предпочитали народные училища, попасть в которые было

Вид г. Казани

Гравюра 30-х годов XIX века, работы В. Турнка

гораздо легче; вступительные экзамены в гимназию были не просты — об этом можно судить по приводимым ниже воспоминаниям С. Т. Аксакова, по той радости, с которой его родители приняли известие, что сын их выдержал экзамен и принят на казенное содержание. Хорошо подготовить детей к экзаменам Прасковье Александровне, которая сама была едва грамотна, было отнюдь не легко; но то обстоятельство, что все три ее сына были приняты «казеннокоштными» воспитанниками, свидетельствует об их хорошей подготовке. Возможно, что сама мать вскоре оставила Казань, потому что сохранившееся в архиве Казанского университета письмо ее от 1805 г. прислано из Нижнего-Новгорода. Это было обычным явлением: родители, не жившие в Казани, оставив своих детей, принятых на казенное содержание, возвращались домой, — так поступили и родители Аксакова. Во всяком случае девяти лет Н. И. Лобачевский поступил в пансион Казанской гимназии вместе со своими братьями и в дальнейшем в семье проводил короткие каникулярные промежутки: он был предоставлен школьным воспитателям и самому себе.

Жизнь гимназии в этот период, как уже сказано, ярко описана С. Т. Аксаковым. Он поступил в гимназию раньше Лобачевского, именно был зачислен казеннокоштным воспитанником в первый класс в декабре 1800 г. и был в ней оставлен в пансионе. В своих «Воспоминаниях» он посвящает гимназии две статьи.[1] По его описанию, режим в гимназии был очень суровый. «Вставание по звонку задолго до света при потухших и потухающих сальных свечах, наполнявших воздух нестерпимой вонью; холод в комнатах, отчего вставать было еще неприятнее... Общественное умывание из медных рукомойников, около которых всегда бывает ссора и драка; ходьба фрунтом на молитву, к завтраку, к обеду и т. д.».[2] Но не в этой, может быть, необходимой дисциплине общежития была суть дела. Гораздо хуже было то полное подавление личности воспитанника, которое последовательно проводилось со дня его поступления в гимназию до ее окончания... По распоряжению гимназического начальства никто из воспи-

[1] С. Аксаков. Семейная хроника и воспоминания. Москва, 1856. «Гимназия — первый период», стр. 167—231; «Гимназия — второй период», стр. 263—326.
[2] Там же, стр. 191.

153306

танников не мог иметь у себя ни своих вещей, ни денег; деньги, если они были, хранились у комнатных надзирателей и употреблялись с разрешения главного надзирателя; покупка съестного и лакомства строго запрещалась; конечно, были злоупотребления, но под большой тайной. В числе других строгостей было постановление, чтобы переписка воспитанников с родителями и родственниками производилась через надзирателей: каждый ученик должен был отдать незапечатанное письмо для отправки на почту своему комнатному надзирателю, и он имел право прочесть письмо, если воспитанник не пользовался его доверенностью». [1]

Может быть, Аксаков и был дома несколько изнежен матерью; но главный надзиратель гимназии Н. И. Камашев подвергал его систематическому и унизительному преследованию.

«Я возненавидел в душе противную гимназию, учение, — рассказывает Аксаков, [2] — и решил по-своему, что оно совершенно бесполезно, совсем не нужно, и что от него все дети делаются негодными мальчиками». Но особенно тяжкими были для него несправедливые гонения со стороны старшего надзирателя Камашева. «Каждое его появление производило потрясение в моих нервах; ...его страшный образ поселился в детском моем воображении, и тягостное его присутствие со мной не расставалось». Камашев довел мальчика до нервного заболевания; мать вынуждена была, продержав его продолжительное время в больнице, взять его из гимназии. Через год родители возвратили мальчика в гимназию, но уже в качестве своекоштного воспитанника. Мы на этом остановились подробно потому, что этот режим не был, конечно, случайностью, имевшей отношение к одному Аксакову. Под суровой пятой Камашева жили все воспитанники гимназии, особенно казеннокоштные, не покидавшие гимназии. В июне 1804 г. старшие учащиеся были доведены до открытого возмущения, которое было сурово подавлено. Губернатор явился в гимназию с солдатами, арестовал шестнадцать воспитанников: восемь из них были исключены из гимназии, восемь других строго наказаны. [3] В связи

---

[1] С. Аксаков. Семейная хроника, стр. 195.

[2] Там же, стр. 197.

[3] Об этом см. также Д. Нагуевский. Казанская гимназия накануне основания Казанского университета. Казань, 1900.

с этими беспорядками директором гимназии был назначен старший надзиратель И. Ф. Яковкин, сыгравший потом печальную роль в первые годы существования Казанского университета.

Самым слабым местом гимназии во второй период ее существования было то, что курс был оставлен четырехлетним, а программа значительно увеличена. Усвоение ее требовало очень большого напряжения; редко кому удавалось с нею справиться; большинство учащихся оставалось в одном классе по два, иногда по три года.

Среди преподавательского состава Аксаков, наряду с очень неприятными личностями, указывает также на людей, оставивших у него гораздо лучшие воспоминания. Таких было, собственно, двое: В. П. Упадышевский, его классный надзиратель, и Г. И. Карташевский, преподаватель математики, у которого он жил в качестве пансионера во второй период своего обучения в гимназии. Об Упадышевском он говорит как об очень мягком человеке, внимательном и сердечном педагоге, заботливо оберегавшем его от физических и душевных невзгод. Упадышевский был уже в пожилом возрасте, Карташевский же был еще молодым человеком. Аксаков не имел интереса к математике, которую преподавал Карташевский, но он чувствовал в нем человека с научными интересами и высоко это ценил. «Григорий Иванович, — пишет Аксаков, [1] — серьезно занимался наукой и, пользуясь трудами знаменитых тогда ученых по этой части, писал собственный курс чистой математики для преподавания в гимназии; он читал много немецких писателей, философов и постоянно совершенствовал себя в латинском языке». Аксаков ценил в Карташевском и жизнерадостного человека, педагога, вызывавшего у него глубокое уважение своим моральным обликом. Несколько сдержаннее относился Аксаков к И. И. Запольскому, преподавателю физики, у которого также некоторое время жил пансионером.

Такова была обстановка, в которой протекали школьные годы братьев Лобачевских; таковы были люди, под воздействием которых складывались их познания и характеры. Братья Лобачевские были, конечно, гораздо менее избалованы, чем Сережа Аксаков, и легче выносили режим гимназии; но протест против суровой муштровки

[1] С. Аксаков. Семейная хроника, стр. 295.

иногда прорывался и у Николая. Впрочем, официальные отзывы о нем того самого главного надзирателя гимназии В. П. Упадышевского, о котором с такой симпатией рассказывает Аксаков, были вполне благоприятны. «В гимназии, — рассказывает Яншевский,[1] — Н. И. Лобачевский учился очень хорошо». В ведомостях Упадышевского за время учения в гимназии Николай Лобачевский аттестовался «весьма прилежным и благонравным» и уже в конце гимназического курса «занимающимся с особенным прилежанием математикой и латинским языком». Не лишено, однако, вероятия, что такой безукоризненный отзыв объясняется именно мягкостью Упадышевского. Сам Николай Иванович иначе характеризует свои настроения в гимназии. Суровая школьная дисциплина была ему совсем не по сердцу, и подчиняться ей он не любил. Как сообщает Н. П. Вагнер,[2] Николай Иванович рассказывал его сестре, что когда он был гимназистом, то один из его учителей, выведенный из себя его буйным характером, вскричал: «Ты, Лобачевский, будешь разбойником!» Через много лет Лобачевский добродушно напомнил своему учителю его несбывшееся предсказание. Не подлежит сомнению, что интерес к математике был у Лобачевского вызван талантливым преподаванием Карташевского.

Наиболее значительно то, что при скромной подготовке, которую они могли получить дома у матери, все три брата Лобачевские успешно справлялись с учением и прошли курс гимназии без задержек, не оставаясь на второй год. Хорошо известно, с каким трудом усваиваются в школе языки, а между тем уже в начале обучения в университете Н. И. Лобачевский был в состоянии читать научные мемуары на латинском, немецком и французском языках. Содержание математических мемуаров, которые он штудировал, настолько серьезно, что с ними и в настоящее время справился бы только хорошо подготовленный студент, а Лобачевскому в то время было всего 15 лет. Это свидетельствует о настойчивом, упорном труде мальчика в школе и о хорошем преподавании. Математике Лобачевский учился у Карташевского, которого Аксаков отнюдь не перехвалил, физике — у Запольского. Оба учителя имели действительно серьезный интерес к науке, что

---

[1] Э. П. Яншевский. Назв. соч., стр. 2.
[2] Н. П. Вагнер. Из жизни великого геометра, стр. 7.

в преподавателе средней школы в то время было исключительной редкостью. Карташевский был одним из первых образцов учителя с научным направлением мысли; Н. И. Лобачевский был тоже одним из первых образцов такого же отношения к науке ученика. При этих научных интересах суровый режим школы до некоторой степени прошел мимо Лобачевского: люди, с которыми он имел длительное общение, заслонили от него неприятную, тяжелую личность директора гимназии Яковкина. Со всеми этими лицами нам придется встречаться в дальнейшем.

В январе 1807 г. Н. И. Лобачевский оставил первую Казанскую гимназию и перешел в Казанский университет. Гимназия навсегда сохранила лестную память о том, что в числе первых своих питомцев она воспитала великого гения русской науки. Вот что писал совет гимназии Казанскому университету в день празднования столетнего юбилея со дня рождения Лобачевского 22 октября 1893 г.

«Припоминая свое прошлое, гимназия гордится тем, что в своих стенах воспитала того, чествование памяти научных заслуг которого объединяет в настоящий день всех, кому дороги успехи науки и просвещения. Приготовив первый контингент слушателей Казанскому университету, гимназия с отрадой увидала, что открытие этой высшей школы науки дало возможность развить свои духовные силы тем, кто раньше, в силу затруднительных условий, не мог этого достигнуть. Тем дороже для нее память Лобачевского, что в нем она видит великую русскую силу, при стесненных сначала обстоятельствах сумевшую развиться на благо и пользу русского общества и общечеловеческой науки».

II. Открытие Казанского университета и вступление в него Н. И. Лобачевского

Первые годы XIX в. совпадают с началом царствования императора Александра I, с периодом его либеральных устремлений. К этому периоду относится открытие новых университетов в Харькове и Казани. Официальной причиной основания университета в Казани было то, что в Казани уже функционирует гимназия, готовящая для университета будущих студентов.[1] Действительные причины

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, стр. 2.

были несомненно глубже: имелось в виду усиление русской культуры в обширном и далеком крае с преобладающим нерусским населением; университет должен был готовить людей, которые были бы способны выполнить эту задачу лучше, чем чрезмерно усердные миссионеры. «Главное правление училищ» — основной коллегиальный орган незадолго перед тем (1802) созданного Министерства народного просвещения — выработало устав университета, а 5 (17) ноября 1804 г. императором Александром I была утверждена так называемая «утвердительная грамота Казанского университета» — акт, которым новый университет призывался к жизни и деятельности.

Одним из первых шагов организованного в 1802 г. министерства народного просвещения было учреждение учебных округов; во главе каждого округа стоял попечитель, которому был подчинен и университет, если таковой в этом округе существовал. Попечителем Казанского учебного округа был назначен известный ученый — астроном С. Я. Румовский. Роль Румовского как в деле организации университета, так и в судьбе Лобачевского была настолько велика, что на нем нельзя не остановиться.

Среди попечителей того времени Румовский был единственным ученым, — более того, он был среди них единственным человеком, за которым не было ни знатного происхождения, ни значительного богатства; но — в этом нужно согласиться с Н. Н. Буличем,[1] — он не обладал значительным государственным умом. К числу крупных ученых он также не принадлежал. Он был сыном священника, первоначальное образование получил сначала во владимирской, потом в петербургской Невской семинарии, где вскоре любимым предметом его занятий сделались математические науки. М. В. Ломоносов, экзаменовавший учеников этой семинарии с целью пополнения академической гимназии, выделил Румовского, поместил его в эту гимназию, и с этих пор, почти до конца жизни Румовский остался тесно связанным с Петербургской Академией Наук. По окончании гимназии он становится сначала учеником, а затем сотрудником Эйлера, близость с которым он сохранил до конца жизни последнего. По

---

[1] Н. Н. Булич. Из первых лет Казанского университета, ч. I, стр. 21—41; сведения заимствованы из жизнеописания Румовского, приведенного в этой книге Булича.

инициативе Эйлера он был командирован в Берлин, где работал в университетской обсерватории. По возвращении на родину он работал в Астрономической обсерватории Академии Наук, а затем продолжительное время заведывал ею. Он организовал две экспедиции для наблюдения за прохождением Венеры по диску Солнца; одна из этих экспедиций совершенно не удалась; но наблюдения, выполненные Румовским во второй экспедиции, получили некоторое значение. Он установил первые приборы в обсерватории Академии, наладил в ней регулярные наблюдения. Благодаря этому он приобрел некоторую известность в астрономических кругах Европы, но, как уже сказано, крупным ученым он не был. Может быть, был прав М. В. Ломоносов, утверждавший, что С. Я. Румовский вообще не был крупным человеком. Однако отзывы Ломоносова, имевшего личные основания для раздражения против Румовского, несомненно были слишком резки. Во всяком случае Румовский принадлежал к небольшому числу первых русских ученых, которым удалось пробить себе путь в трудной, нездоровой обстановке, созданной тогда в нашей Академии ее иностранными, главным образом немецкими, членами. Он завоевал себе скромное научное имя; ему покровительствовал Эйлер; его лично знали Екатерина II и княгиня Дашкова. Он был на виду, он действительно импонировал подчиненному ему округу и профессуре, которую он пригласил в Казанский университет. Он несомненно относится к молодому университету очень благожелательно, искренне хотел поставить его на высоту настоящего высшего учебного заведения. Но очень трудна была задача, недостаточно широк был его собственный кругозор, а главное, ему шел уже восьмой десяток, когда на него легли такие ответственные и сложные задачи. Он удачно справился только с одной из них — хорошо организовал близкий ему физико-математический факультет Казанского университета.

Устав новооткрытого Казанского университета по существу не отличался от типового устава университетов 1804 г.; это был лучший устав, каким русские университеты обладали в царское время. Он был построен на основах широкой автономии: все должностные лица университета, начиная с преподавателей и кончая ректором, должны были избираться советом университета; университет имел свой суд, даже свою полицию; он не только пользовался

правом бесцензурного печатания своих изданий, но его редакционный комитет служил органом, разрешавшим к печати все научные произведения, публиковавшиеся в Казани, кем бы они ни были составлены. Самостоятельность и независимость университетской коллегии во всех сторонах жизни этого высшего учебного заведения составляли основные принципы его устава. Но по началу эти принципы нельзя было осуществить. Ко дню открытия университета не было коллегии профессоров: их неоткуда было и взять, кроме как из состава преподавателей гимназии. Не было помещения кроме гимназии, располагавшей уже к тому времени приличным зданием; не было студентов, их можно было привлечь только из небольшого числа абитуриентов гимназии; не было ни учебных пособий, ни учебно-вспомогательных учреждений, если не воспользоваться кабинетами гимназии. Наиболее естественным было бы отложить хотя бы на короткое время открытие университета, подготовить все необходимое и тогда приступить к занятиям. Однако, следуя совету директора гимназии, И. Ф. Яковкина, назначенного на этот пост после упомянутого выше гимназического «бунта», Румовский решил взять все необходимое из гимназии. В дополнение к корпусу, отделенному от гимназии, университету было предоставлено здание, отстроенное для губернаторского дома; два других небольших дома были приобретены у частных лиц. Таким образом, для университета было обеспечено помещение. В связи с этим было естественно приспособить под нужды университета и учебно-вспомогательные учреждения гимназии.

Два преподавателя гимназии были назначены профессорами: не так давно прибывший из Германии П. А. Цеплин по кафедре всеобщей истории, географии и статистики и И. Ф. Яковкин по кафедре истории, географии и статистики Российской империи. Кроме того, из числа преподавателей гимназии были назначены четыре адъюнкта (доцента): Г. И. Карташевский по кафедре высшей математики, И. И. Запольский по кафедре прикладной математики и опытной физики, И. И. Эрих по кафедре древних языков, Л. С. Левицкий по кафедре умозрительной и практической философии. Наконец, по кафедре патологии, терапии и клиники был назначен профессором штаб-лекарь И. В. Протасов. Из всех этих лиц по своим познаниям на преподавание в университете с полным правом могли

претендовать только известные уже нам Карташевский и Запольский.

Руководящим органом совместного управления университетом и гимназией стал совет гимназии под председательством Яковкина, который был также назначен инспектором студентов; в его руках была сосредоточена также вся хозяйственная часть университета; он сделался фактически полновластным распорядителем судеб университета, располагал властью, быть может большей, чем та, которая могла бы принадлежать ректору.

Когда все эти мероприятия были уже осуществлены, С. Я. Румовский приехал в Казань; 14 (26) февраля 1805 г. состоялось торжественное собрание совета, на котором университет был объявлен открытым. Так Казанский университет начал свою деятельность в виде надстройки над гимназией, в организационных нормах, не только не соответствовавших его уставу, но не получивших даже официального одобрения министерства.

После этого нужно было укомплектовать состав студентов. По распоряжению Румовского Яковкин от имени совета гимназии запросил родителей учеников гимназии о желании их «оставить или вновь отдать сыновей в полное распоряжение университета», т. е. поместить их в университет казеннокоштными студентами, с тем чтобы они, пройдя университетский курс, в течение шести лет несли преподавательскую службу по указанию министерства. Почти все родители на это согласились. Их ответы представляют значительный интерес, поскольку они характеризуют отношение родителей того времени к высшему образованию. Читатель найдет эти ответы в I томе книги Загоскина,[1] мы приведем здесь только ответ матери Лобачевского.

«Милостивый государь Илья Федорович! — пишет из Нижнего вдова Прасковья Лобачевская, мать будущего великого математика. — Два письма из совета гимназии от имени Вашего имела честь получить. Извините меня, что я по причине болезни долго не отвечала. Вы изволите писать, чтоб я уведомила Вас о своем намерении желаю ли я, чтобы дети мои (Александр, Алексей и Николай) остались казенными, с тем дабы, окончив ученический и сту-

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, стр. 83—85.

денческий курсы, быть шесть лет учителями. Я охотно соглашаюсь на оное и желаю детям как можно прилагать свои старания за величайшую государя милость, особливо для нас, бедных».

Письмо подписано рукой Прасковьи Александровны; многие родители и этой подписи учинить не могли. Все абитуриенты, желавшие поступить в университет, подвергались вступительному экзамену. Лобачевские — все три брата — были приняты в университет. Старший брат Александр был уже зачислен в феврале 1805 г., Николай и Алексей были зачислены почти одновременно, в 1807 г. Запоздание было вызвано тем, что вступительным экзаменам Николай Лобачевский подвергался дважды. Вот что писал Аксаков[1] о вступительном экзамене в Казанский университет.

«В строгом смысле, человек с десять, разумеется, в том числе и я, не стоили этого назначения по неимению достаточных знаний и по молодости; не говорю уже о том, что никто не знал по-латыни и весьма немногие знали немецкий язык, а с будущей осени надобно было слушать некоторые лекции на латинском и немецком языках... Сейчас был устроен латинский класс и большая часть будущих студентов принялась за латынь». Лобачевский и был задержан потому, что недостаточно был подготовлен по латинскому языку. Однако существенной причиной было, вероятно, то, что ему ко времени первого экзамена едва исполнилось четырнадцать лет. Николай Лобачевский был допущен к слушанию университетских лекций 9 (21) января и переведен в студенты университета 14 (26) февраля того же года. Таким образом, не имея еще от роду полных пятнадцати лет, Н. И. Лобачевский был уже студентом университета. С этого времени вся его жизнь была неразрывно связана с Казанским университетом.

III. Студенческие годы Лобачевского

Само собой разумеется, что при том составе преподавателей, с которым Казанский университет начал функционировать, о разделении его на четыре факультета, как это

---

[1] С. Аксаков. Семейная хроника, стр. 321.

предусматривал устав, не могло быть и речи. Курсы, которые читались в то время, могли в известной степени служить для общего образования студента, но и в этом своем назначении не представляли ничего систематического, цельного. Было совершенно ясно, что прежде всего нужно укомплектовать профессорский состав и заместить кафедры, предусмотренные уставом. В первые годы существования университета для этого не было иных путей, как пригласить профессоров из-за границы. Предоставив организационное и внутреннее управление университетом Яковкину, Румовский этим главным образом и занялся. Условия были довольно благоприятны. Западная Европа переживала полосу наполеоновских войн, на смену революционной эпохе шла реставрация. Особенно неспокойно было в Германии; люди чувствовали себя неуверенно, для квалифицированного интеллигентного труда не было применения. Многие довольно охотно принимали приглашение в Россию; Румовскому уже в первые два года удалось привлечь значительное число профессоров, главным образом из Германии; это были люди чрезвычайно различные по своему научному значению, политическим взглядам, моральным установкам, своему отношению к стране, которая должна была стать их второй родиной, по выполнению обязанностей, которые они на себя взяли. Трудный переезд в далекую Казань часто их очень пугал. В самой же Казани они встречали малокультурную обстановку; мы видели, как ее описывал Браун, а другие профессора рисовали еще более безотрадную картину. Приехавшие профессора обыкновенно были плохо устроены; не легки были на первых порах и материальные условия. Но что было хуже всего, войдя в состав коллегии, они встречали здесь, вместо норм устава, с которым их предварительно знакомили, самовластие Яковкина.

И. Ф. Яковкин отличался большой энергией и настойчивостью; в дело организации университета он несомненно вложил много сил и старания. Но это был человек чрезвычайно самовластный, не желавший считаться ни с чьим мнением, принимавший всякое возражение как личное оскорбление, всякое мнение, отличное от его взгляда, как противодействие власти. Он легко подчинил себе пожилого и слабовольного Румовского, тем более что последний жил в Петербурге, в Казань приезжал очень редко, а в первые годы вовсе в ней не появлялся. Яковкин писал ему

обо всех мелочах жизни университета, изображал деятельность совета и отдельных его членов в крайне искаженном виде, сообразно своим взглядам и интересам; Румовский, можно сказать, беспрекословно исполнял его волю, — он сам сделался, таким образом, орудием в руках Яковкина, а члены преподавательской коллегии стали просто игрушками в руках последнего. Если при этом принять во внимание, что никакого представления о нормальной жизни высшего учебного заведения Яковкин не имел, то станет ясно, что он установил в университете настоящий полицейский режим, который для людей сколько-нибудь независимых скоро становился совершенно невыносимым. Попытки некоторых иностранных профессоров, к которым присоединились Карташевский и Запольский, установить нормы, которые определяли бы их права, рассматривались как прямая крамола; талантливый Карташевский, о котором в таких теплых тонах вспоминает Аксаков, который из местных преподавателей университета несомненно более других был на месте, уже в ноябре 1806 г. был отстранен от должности за противоречия в совете, за участие в «заговоре членов совета». Ему это повредило мало, он переехал в Петербург, сделал видную служебную карьеру и окончил жизнь в должности сенатора. Но университет потерял талантливого преподавателя математики, а борьба в совете приняла затаенный, хотя по существу более острый характер.

После ухода Карташевского преподавание математики в университете было поручено двум студентам — В. Граеру и А. Княжевичу. Лобачевский при вступлении в университет был, повидимому, в математике сильнее их. Приведенная выше гимназическая его аттестация свидетельствует о том, что он уже в гимназии питал особенный интерес к математике; но по вступлении в университет ему учиться математике было совершенно не у кого; он уделял больше внимания медицине. «Он приметно предуготовляет себя для медицинского факультета», писал о нем Яковкин Румовскому. Однако в следующем учебном году обстоятельства существенно изменились; в 1808 г. в Казань для преподавания математических наук прибыли два новых профессора, приглашенных Румовским: М. Ф. Бартельс (Мартин Федорович, как его называли в России) и К. Ф. Реннер. Бартельс сыграл несомненно важную роль как в деле образования Лобачевского, так и во всей его научной дея-

тельности; на нем необходимо хотя бы вкратце остановиться.[1]

Бартельс родился в 1769 г. Он происходил из бедной семьи, учился сначала в низшей школе сиротского дома, а затем в одном из городских училищ, где все обучение заключалось в чистописании, арифметике и законе божьем. Позднее в этой же самой школе начал свое обучение знаменитый Гаусс, который был на восемь лет моложе Бартельса. К тому времени как Гаусс поступил в эту школу, Бартельс получил в ней место помощника учителя; это была совершенно незначительная должность; он должен был следить за письмом учеников, чинить им перья и т. д. Но на этих скромных ролях он все же подружился с Гауссом, который позже всегда ему покровительствовал. Повидимому, Гаусс тогда же склонил Бартельса, которому еще не было четырнадцати лет, продолжать учиться. В дальнейшем образовании Бартельса было много блужданий. Ему удалось поступить в Брауншвейге в коллегию (1788), представлявшую нечто промежуточное между средней и высшей школой; он научился здесь языкам и укрепился в элементарной математике, которую преподавал хороший педагог Циммерман. После этого Бартельс учился в Гельмштедском университете; он предназначал себя для юридической карьеры, но известный математик Пфафф овладел его интересами, и Бартельс склонился к занятиям математикой; после этого он перешел в Геттингенский университет, чтобы завершить математическое образование. Здесь Бартельс вновь встретился с Гауссом и после этого не прерывал с ним связи до конца жизни. Повидимому Гаусс рекомендовал Бартельса Фуссу, который состоял в то время непременным секретарем Петербургской Академии Наук. Ссылаясь на это, Фусс, в свою очередь, рекомендовал Бартельса Румовскому. Эта двойная рекомендация очень импонировала последнему, и он немедленно предложил Бартельсу (1805) занять кафедру математики в Казанском университете. Бартельс сначала охотно принял это предложение и даже получил назначение. Однако в Казань он тогда не поехал по ряду причин, сыгравших решающую роль. В Брауншвейге предполагалось соорудить астроно-

[1] Более подробные биографические сведения о Бартельсе можно найти у Булича. Из первых лет Казанского университета, ч. I, стр. 226—256.

мическую обсерваторию, которой должен был заведывать Гаусс; Гаусс же предназначал Бартельса в свои помощники по управлению обсерваторией. Эти астрономические связи внушили Румовскому еще больше уважения к Бартельсу: он не только не был обижен отказом Бартельса, но предложил его в почетные члены Казанского университета. Это звание Бартельс получил (оно тогда оплачивалось двумя стами рублей в год), и Румовский неоднократно пользовался его советами. Имя Бартельса было хорошо известно в Казанском университете; оно уже почиталось даже студентами.

Между тем, политическая конъюнктура в Брауншвейге существенно изменилась. Весна 1806 г., окончившаяся для Пруссии тяжелой неудачей в войне с Наполеоном, положила конец просветительным планам брауншвейгского правительства; Бартельс остался совершенно без средств и теперь сам обратился к Румовскому с предложением приехать в Казань. Румовский охотно это предложение принял, и 15 февраля 1808 г. после очень трудного путешествия Бартельс прибыл в Казань.

Бартельса, как ученого, не только в русской, но даже и в немецкой литературе значительно переоценивали. А. В. Васильев передает даже, будто Лаплас на вопрос — кто первый математик Германии, ответил: «Бартельс, потому что Гаусс — первый математик мира». Но это ошибка. Лаплас действительно высказал такое суждение, но оно относилось не к Бартельсу, а к Пфаффу.[1] В действительности Бартельс был хорошо образованным математиком, отличным педагогом и чрезвычайно добросовестным человеком. Это был один из немногих иностранных профессоров, вложивших в свою работу всю энергию, все внимание и любовь к делу, на которые университет мог рассчитывать; в Казани он пробыл 12 лет и положил основание казанской математической школе. При всем том крупным математиком Бартельс не был. Сколько-нибудь существенного научного творчества он не проявил; его курс анализа[2] действительно был для того времени хорошо построенным учебником, но никаких собственных идей не

---

[1] См. E. Schering. C. H. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus. Göttinger gelehrte Abhandlungen. Math. Cl., 34, 1887, H. 3, стр. 3.

[2] J. M. C. Bartels. Vorlesungen über mathematische Analysis. Dorpat, 1833.

содержал. Все это нужно иметь в виду, чтобы уяснить себе ту роль, которую он сыграл в Казанском университете и в жизни Лобачевского.

Когда Бартельс прибыл в Казань, его здесь ждали, его имя было окружено ореолом. Поэтому в его аудиторию пришли все интересовавшиеся математикой, а их было в Казанском университете не так мало; на первой же лекции у Бартельса появилось 15 студентов. Избранными учениками Бартельса были Н. И. Лобачевский и И. М. Симонов, в будущем известный русский астроном. Бартельс был вполне доволен той подготовкой, которую студенты получили у Карташевского. Он читал различные отделы анализа, аналитической геометрии и аналитической механики; студентам, проявлявшим большие способности, он читал специальные курсы, вел с ними приватные занятия. Такими студентами с самого начала были Н. И. Лобачевский и И. М. Симонов. Особенно приятное впечатление производит та радость, которую в Бартельсе вызывают успехи его учеников. «Мои лекции по хорошим успехам большинства слушателей доставляют мне много удовольствия», писал Бартельс Румовскому в начале своего преподавания. Вот что писал он попечителю об успехах своих слушателей, и в особенности о Лобачевском (следуя Буличу, цитируем отзыв в переводе самого Румовского, который привел его в представлении министру народного просвещения):[1]

«Последние два [Симонов и Лобачевский], особливо же Лобачевский, оказали столько успехов, что они даже во всяком европейском университете были бы отличными и я льщусь надеждой, что если они продолжать будут упражняться в усовершенствовании своем, то займут значащие места в математическом кругу. О искусстве последнего приведу хотя один пример. Лекции свои располагаю я так, что студенты мои в одно и то же время бывают слушателями и преподавателями. По сему правилу поручил я пред окончанием курса старшему Лобачевскому предложить под моим руководством пространную и трудную задачу о кругообращении (Rotation), которая мною для себя уже была по Лагранжу в удобопонятном виде разработана. В то же время Симонову приказано было записывать течение преподавания, которое я в четыре приема кончил, дабы сооб-

[1] Н. Н. Булич. Из первых лет Казанского университета, ч. I, стр. 246—247.

щить его прочим слушателям. Но Лобачевский, не пользовавшись сею запискою, при окончании последней лекции подал мне решение сей столь запутанной задачи на нескольких листочках в четверку написанное. Г-н академик Вишневский, бывший тогда здесь, неожидаемо восхищен был сим небольшим опытом знаний наших студентов».

Лобачевский получил вследствие этого отзыва благодарность министра народного просвещения.

Повествуя об этом, нельзя не упомянуть добрым словом выдающегося человека и преподавателя, который в неблагоприятных условиях четырехгодичного курса гимназии сумел подготовить учащихся к восприятию такого серьезного курса высшей математики. Это был Г. И. Карташевский, которого Яковкин успел уже выжить из университета.

Любопытно, каков был метод преподавания самого Бартельса, благодаря которому он достигал значительных успехов даже у средних студентов, благодаря которому из его школы вышли такие выдающиеся ученые, как Лобачевский, Симонов, Перевощиков (впоследствии известный академик). Он начинал с сочинений, которые занимали как бы промежуточное место между руководствами для средней и высшей школы. Вот что он по этому поводу пишет сам. [1]

«Для первого курса я выбрал тригонометрию Каньоли. Сочинение это помогло мне для сообщения предварительных понятий о теории строк, о дифференциальном исчислении, вместе с тем давало основательные сведения из обеих тригонометрий. Как ни важна, впрочем, эта книга, но я считал нужным во многих местах совершенно изменять ее изложение, держаться ее только в общих чертах. Весьма приятный опыт, сделанный мною на моих слушателях, показал мне всю целесообразность моей методы. Мне удалось даже слабейших так подвинуть, что они в состоянии с довольною легкостью решать почти все задачи тригонометрии; в то же время они настолько усвоили из дифференциального счисления и из теории строк, что могут применять это знание к логарифмическим функциям. Естественно, что было большое различие между этими слушателями и теми, которые успели усвоить уже сообщаемые им истины. На втором курсе я излагал теорию чисел по

[1] Н. Н. Булич, Из первых лет.., ч. I, стр. 241—242.

Гауссу (конечно, только некоторые главы) и дифференциальное счисление с большою подробностью, с тем чтоб приготовить моих слушателей к третьему курсу, в течение которого я буду излагать аналитическую геометрию и механику».

Книга Каньоли [1] представляет собой несомненно поучительный курс тригонометрии, богатый содержанием. Она содержит обстоятельное изложение основных свойств тригонометрических функций и их применений к геодезическим и астрономическим вычислениям. Для исследования малых вариаций к этому присоединены простейшие начала дифференциального исчисления. Приемы, как и обычно в XVIII в., не безукоризненные, но книга полезна для общего математического образования.

Анализ Бартельс преподавал по книге Лакруа, [2] несомненно лучшему в то время курсу элементарной и высшей математики. После этого Бартельс переходил к книгам Эйлера, а успевающих студентов заставлял читать серьезные и трудные математические сочинения, как, например, «Exposition du système du monde» Лапласа. Некоторое недоумение вызывает только, что аналитическую геометрию Бартельс читал только на третьем курсе.

В конце 1808 г. в Казань прибыл еще один профессор, приглашенный в состав физико-математического факультета, — К. Ф. Реннер, только что окончивший университет в Геттингене. Он был приглашен по рекомендации Бартельса и занял кафедру прикладной математики. Скромный, сдержанный, не вмешивавшийся в университетские споры и распри, Реннер не оставил яркого следа в истории Казанского университета. По рассказам его учеников, которые впоследствии сами сделались профессорами математики (повидимому, Симонов и Перевощиков), Реннер был человеком спокойным и ровным, жившим одними умственными интересами. Точный и глубоко образованный ум его, привычный к строгой математической логике, полнота содержания его лекций, читанных на изящном французском

[1] A. Cagnoli. Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris, 1786. В ходу был этот перевод; итальянский оригинал назывался Trigonometria plana et sferica.

[2] S. F. Lacroix. Traité du calcul différentiel et intégral. Paris, 1797. Насколько высоко это руководство ценилось во Франции, можно судить по тому, что после смерти автора оно было выпущено в переработке Серре и Эрмита.

языке, — все это осталось в памяти первых слушателей, всегда вспоминавших о нем с уважением.[1]

Благодаря Реннеру Лобачевский хорошо овладел теоретической механикой, которую он сам позже с успехом преподавал. Однако Реннер недолго работал в Казанском университете. В 1816 г. он заболел корью, от осложнения которой скончался.

Через два года в Казань прибыли еще два профессора, также оказавшие очень сильное влияние на образование, а может быть, и на мировоззрение Н. И. Лобачевского. Это были Ф. К. Броннер и И. А. Литтров — оба несомненно выдающиеся во всех отношениях люди.

«Ксаверий Иванович Броннер (Franz Xaver Bronner), — пишет Загоскин,[2] — представляет собою личность, в высшей степени замечательную превратностями судьбы и крайней своеобразностью тех условий общественного, нравственного и интеллектуального характера, под взаимодействием которых складывался далеко не заурядный облик этого будущего крупного деятеля Казанского университета, способный дать богатый материал для анализа его и со стороны психолога, и со стороны моралиста».

Броннер оставил обширную автобиографию,[3] извлечение из нее можно найти у Булича;[4] очень интересна также монография, посвященная Броннеру Нагуевским.[5] Она содержит очень живой очерк жизни и деятельности Броннера, его дневник и переписку с С. Я. Румовским, М. А. Салтыковым (попечителем Казанского учебного округа, сменившим Румовского на этом посту), академиком Н. И. Фуссом, гр. А. К. Разумовским (министром народного просвещения). Мы, конечно, вынуждены ограничиться здесь очень кратким извлечением из нее.

Ф. К. Броннер родился в 1758 г. в семье бедного фабричного рабочего. Родители готовили его к духовной карьере. Одиннадцати лет он был принят в иезуитскую семинарию

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, стр. 240.

[2] Там же, стр. 267.

[3] F. X. Bronners Leben, von ihm selbst beschrieben. I—III, Zürich, 1795—1797. — Мне не удалось видеть это сочинение.

[4] Н. Н. Булич. Из первых лет Казанского университета, ч. II, стр. 185—276.

[5] Д. И. Нагуевский. Профессор Ф. К. Броннер, его дневник и переписка. Казань, 1902.

города Диллингена. Как известно, иезуиты в своих школах давали воспитанникам серьезное научное образование, чтобы приобрести влиятельных людей на всех поприщах. Не будет преувеличением сказать, что Броннер воспринял в этой школе все, что она давала положительного, и уберег себя от развращающего влияния иезуитов. В 1773 г. папской буллой, известной под названием «Dominus ac Redemptor noster», был официально уничтожен орден иезуитов со всеми его учреждениями, в том числе и просветительными. Однако фактически орден не прекратил своего существования. Когда вследствие этого семинария, в которой учился Броннер, была закрыта, он вступил послушником в Бенедиктинский монастырь, где вскоре постригся в монахи. Под руководством монахов этого монастыря он стал усердно изучать математику, механику и физику. Занимаясь в то же время богословием, он втихомолку читал и светские книги, в том числе даже запретные для монаха сочинения Руссо и Вольтера. В науках Броннер продвигался настолько успешно, что духовное начальство на средства монастыря командировало его в 1782 г. в монастырь города Эйхштетта, где он продолжал изучать главным образом математику.

Это было время нараставших революционных настроений во Франции, находивших отзвук в различных странах Европы, — время, когда широкое распространение получили идеи свободомыслия, а также разнообразные организации и кружки, отражавшие дух брожения против господствующей католической церкви. Иезуиты продолжали вести с этими настроениями упорную борьбу. Несмотря на усиленные предупреждения отцов-пресвитеров, Броннер очень скоро по прибытии в Эйхштетт вступил сначала в масонскую ложу, а затем в орден иллюминатов, возникший для борьбы, главным образом, со скрытым иезуитизмом. По существу, это общество представляло собой одну из разновидностей масонства; специфической чертой ее, однако, были либеральные блуждания, неопределенные моральные искания, лишенные какой бы то ни было твердой программы, но несомненно расшатывавшие официальную религию. В Броннере влияние иллюминатов пробудило отвращение к монашеской жизни; с большими усилиями ему удалось добиться в Риме отрешения от монашеского обета, но с тем условием, чтобы он принял священничество. Само собой разумеется, что бывший монах находился под особым

надзором как духовных, так и политических органов; подозрения и преследования, нажим церковной реакции особенно усилились перед французской революцией.

В 1785 г. орден иллюминатов был уничтожен приказом брауншвейгского правительства. Либеральная конституция Швейцарии, в которой Броннер в то время искал приюта, не оградила его от систематических преследований, так что он не видел иного исхода кроме бегства. После многих блужданий, в том числе кратковременного, неудачно для него сложившегося пребывания в революционной Франции, Броннер, работая преподавателем в кантональной школе в г. Аарау, сошелся с Бартельсом, который и рекомендовал его в 1806 г. Румовскому для занятия кафедры физики в Казани. Броннер сам был удивлен тем, что безоговорочно получил приглашение, не имея, в сущности, для этого научных данных; но приглашение он принял и в октябре 1810 г. прибыл в Казань. По дороге Броннер побывал в Петербурге, представился Румовскому, на которого произвел очень хорошее впечатление. По инициативе Румовского он все время своего пребывания в Казани находился с попечителем в деятельной переписке; при его правдивости и правильном освещении, которое он давал происходившим в университете распрям, это несомненно сыграло благоприятную роль в жизни Казанского университета. Здесь Броннер отошел от всякой политической деятельности и всецело отдался делу преподавания; напряженная работа отвлекала его от религиозных блужданий. Он с большим трудом организовал физический кабинет, сам очень много читал и несомненно хорошо преподавал физику. Под его руководством Лобачевский настолько овладел основами этой науки, что позднее был в состоянии без большого напряжения сам ее преподавать. Может быть, Броннер в качестве профессора несколько уступал Бартельсу, но он несомненно был выдающимся, серьезным педагогом и имел большое нравственное влияние на студентов и даже на членов университетского совета.

В 1812 г. Броннер был назначен Румовским первым директором вновь открытого университетского педагогического института. Добросовестная длительная работа Броннера обратила на себя внимание высших органов народного образования; после смерти Румовского он интенсивно переписывался с его преемником М. А. Салтыковым, с академиком Н. И. Фуссом и даже с министром народного про-

свещения А. К. Разумовским. В этой переписке Броннер ярко освещал всё, что делалось в Казанском университете, и это, как и при Румовском, имело для университета немалое значение.

В том же 1810 г. в Казань прибыл И. А. Литтров, положивший начало преподаванию в университете астрономии. В этой области Румовский был особенно компетентен, и его выбор был очень удачным. Литтров пользовался уже европейской известностью и с 1807 г. занимал кафедру астрономии и высшей математики в Краковском университете. Между тем, наступил 1809 г., принесший с собой войну Австрии с Францией. Вена была занята французами, а русские войска, действовавшие тогда в союзе с Францией, заняли Галицию; в Кракове было очень тревожно. Литтров обратился к русскому главнокомандующему с просьбой исходатайствовать ему назначение в русский университет. Предложение было принято Румовским, и в марте 1810 г. Литтров прибыл в Казань. Много хлопот и трудов потребовала от него организация астрономической обсерватории, но он это успешно выполнил. И у него лучшими учениками были Симонов и Лобачевский; последний настолько овладел астрономией, что впоследствии, когда Симонов уже сделался профессором астрономии, с успехом заменял его во время его длительных экспедиций, а в одной из этих экспедиций даже сам принимал деятельное участие.

Основной преподавательский персонал физико-математического факультета был, таким образом, к началу 1810 г. скомплектован, и, нужно сказать, очень удачно. Когда Энгель писал, что к этому времени Казанский университет был так обеспечен преподавательскими силами, как лучшие западноевропейские университеты,[1] то он несомненно имел на это полное основание. В физико-математической школе Казанского университета сложилась очень благоприятная обстановка; преподаватели и студенты были очень довольны друг другом и работали не за страх, а за совесть, со всей энергией и любовью к делу. Это далеко не было общим явлением среди иностранной профессуры, привлеченной в Казанский университет. Организация этого факультета была лучшей заслугой Румовского, быть может, покрывающей многое, что ему справедливо инкриминируется-

[1] F. Engel. N. I. Lobatschefsky. Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig, 1898, стр. 355.

ся. Студенты работали с огромным интересом и прилежанием. Впоследствии, переехав уже в Дерпт, Бартельс в краткой автобиографии, предпосланной им своему курсу анализа, так писал о своих казанских студентах: [1]

«К моей великой радости, я нашел в Казани, несмотря на небольшое число студентов, необыкновенный интерес к математическим наукам. В своих лекциях по математическому анализу я мог рассчитывать по крайней мере на 20 студентов; постепенно здесь у меня образовалась небольшая математическая школа, из которой вышло много хороших преподавателей для русских гимназий и университетов, особенно для Казанского учебного округа».

Этому он так противопоставляет картину, которую застал в старом Дерптском университете: «Несмотря на то, что я нашел здесь значительно больше студентов, среди них было гораздо меньше любителей математики, и я вынужден здесь в своих лекциях ограничиться главным образом элементарной математикой».

Это не удивительно: здесь, в Казани, была поднята целина, в которой здоровые зерна, брошенные умелыми руками, дали богатые плоды. Вот как Аксаков описывает подъем, царивший среди казанских пионеров образования в гимназии и в университете: [2] «Шумная радость одушевляла всех. Все обнимались, поздравляли друг друга и давали обещание с неутомимым рвением заняться тем, чего нам недоставало, так, чтобы через несколько месяцев нам не стыдно было называться настоящими студентами. Нельзя без удовольствия и без уважения вспомнить, какою любовью к просвещению, к наукам было одушевлено тогда старшее юношество гимназии. Занимались не только днем, но и по ночам. Все похудели, все переменились в лице, и начальство принуждено было принять деятельные меры для охлаждения такого рвения. Дежурный надзиратель всю ночь ходил по спальням, тушил свечки и запрещал говорить, потому что и впотьмах повторяли наизусть друг другу ответы в пройденных предметах. Учителя были также подвигнуты таким горячим рвением учеников и занимались с ними не только в классах, но и во всякое свободное время, по всем праздничным дням. Григорий Иванович читал для лучших математических студентов прикладную

---

[1] Bartels. Vorlesungen..., стр. IX.
[2] С. Аксаков. Семейная хроника, стр. 321, 322.

математику; его примеру последовали и другие учителя. Так продолжалось и в первый год после открытия университета. Прекрасное, золотое время! Время чистой любви к знанию, время благородного увлечения!»

Но талантливый, прекрасный педагог Бартельс, давший своим лучшим воспитанникам очень хорошее математическое образование, не был в силах дать им творческое направление. В этом отношении Лобачевский должен был делать шаги самостоятельно; возможно, что это имело для него положительное значение, — об этом ниже. Здесь же нужно сказать, что к концу 1810/11 учебного года Лобачевский владел уже разносторонним и углубленным математическим образованием; он кончал университет, имел право на звание магистра, что в ту пору означало примерно то же, что в настоящее время аспирант. Но здесь возникли препятствия другого рода: над головой Лобачевского собрались тучи, которые могли иметь для него роковое значение.

Лобачевский поступил в университет в возрасте 15 лет, пробыв предварительно около пяти лет в гимназии, в обстановке сурового режима, который был описан выше по воспоминаниям Аксакова. Это был режим подавления не только самостоятельности и инициативы, но и всякой живой мысли, всякой творческой резвости, которая для мальчика так необходима. Университетский режим при управлении Яковкина также не отличался, конечно, избытком свободы, но все же он предоставлял студенту несколько больше самостоятельности, нежели школа. Живой, веселый, очень впечатлительный, утомленный стеснениями, которые в гимназии были для него еще гораздо тягостней, чем для Аксакова (бывшего своекоштным учеником), Лобачевский в университете «отдышался», ему захотелось «пожить» в самом скромном значении этого слова. И в этом он вышел из тех рамок, которые университетская инспекция допускала. В связи с этим на жизненном пути Лобачевского выплывает другая личность — П. С. Кондырев. Это был один из тех людей, о которых говорят: «из молодых, да ранних».

П. С. Кондырев был старше Лобачевского всего на пять лет. В Казанскую гимназию он поступил в 1799 г., при открытии университета был включен в первый состав студентов; с этого времени начинается его головокружительная карьера. Находясь на втором курсе, Кондырев, по

предложению Яковкина, берет на себя чтение трех университетских курсов — истории, географии и статистики и, мало того, он предпринимает составление под руководством Яковкина статистики Российского государства, по словам Яковкина, «самой полной, сколько здешние обстоятельства позволяют».[1] Через год книга была уже готова, получила самый лестный отзыв Яковкина и была преподнесена императору. С этих пор карьера Кондырева становится в полном смысле слова головокружительной. Ни один из воспитанников Казанского университета не добился так быстро профессорского звания; имя Кондырева встречается везде, во всех ученых и псевдоученых начинаниях того времени; он читает самые разнообразные курсы, он готов, кажется, заниматься любой наукой.

«Чем объяснить эту поразительную разносторонность деятельности? — спрашивает Булич,[2] — гениальностью натуры? Но Кондырев был далеко не гениальный человек, его память давно исчезла в университете; его деятельность не оставила никаких прочных следов; но за то ни о ком из тогдашних студентов Казанского университета, ставших впоследствии его деятелями в звании профессоров, не сохранилось так много в архиве бумажной переписки, как о Кондыреве».

Главные причины такого успеха этого несомненно способного человека коренились в его чрезвычайной покладистости, в полной неразборчивости в средствах, в готовности пресмыкаться перед людьми большого влияния; первую роль тут сыграло совершенно раболепное отношение к Яковкину, правой рукой которого он сделался почти с момента своего вступления в университет.

«Легкая возможность составить служебную карьеру при университете, — пишет далее Булич,[3] — для Кондырева увеличилась еще тем, что на его глазах постоянно был живой пример такой карьеры в его покровителе и благодетеле Яковкине, от которого все зависело. Расположение последнего к Кондыреву оставалось неизменным. Кондырев сделался alter ego своего покровителя, а похвалы и покро-

---

[1] Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804—1904) в двух частях под редакцией Н. П. Загоскина. Казань, 1904, стр. 104.

[2] Н. Н. Б у л и ч. Из первых лет Казанского университета, ч. I, стр. 491.

[3] Там же, стр. 492.

вительство последнего еще более раздували его самомнение». Таков был человек, который едва не сыграл в жизни Лобачевского роковую роль.

В июле 1807 г. утонул, купаясь в Казанке, старший брат Н. И. Лобачевского Александр. Погребение ему было устроено «соответственно важности университета», и в церкви кандидат Кондырев говорил надгробную речь; по реляции Яковкина, она была произнесена «с таким чувствованием и выражением, что все в церкви бывшие с ним купно плакали».[1] Это показное сочувствие, однако, не помешало Кондыреву очень скоро начать травлю брата покойного — Николая Ивановича; поводом послужила его склонность к несколько вольным развлечениям. Яковкин сделал своего клеврета, как Кондырева обыкновенно называет Загоскин, своим помощником. Помощник инспектора играл ту же роль, какую позже, уже на наших глазах, выполняли в университете в царское время помощники инспектора. Они следили за поведением, за благонадежностью студентов. Кондырев вел так называемый кондуитный журнал, в котором отмечал проступки студентов; имя Лобачевского с инкриминируемыми ему проступками встречается в этом журнале 33 раза. Вот как об этом рассказывает Булич:[2]

«Лобачевский, как и многие из его товарищей, казенных студентов, живших в университете, любил заниматься пиротехникой. Раз Лобачевский сделал ракету и вместе с другими пустил ее в одиннадцать часов вечера на университетском дворе. За это и за то, «что учинил непризнание, упорствуя в нем, подверг наказанию многих, совершенно сему не причастных», был посажен в карцер по определению совета. В другой раз, будучи уже правящим должность камерного студента («камерный студент есть помощник помощника инспектора казенных студентов» — по определению правил того времени), Лобачевский был замечен «в соучаствовании и потачке проступкам студентов, грубости и ослушании». За эти проступки он наказан был публичным выговором от инспектора студентов, лишен звания правящего должность камерного студента, шестидесяти рублей на книги и учебные пособия, которые только что были ему назначены «за особенные успехи в

---

[1] Там же, стр. 492—493.
[2] Там же, стр. 245—246.

науках и благоповедение» и отпуска до разрешения начальства. Все это происходило в конце 1810 г. Лобачевскому шел 18-й год, он был на последнем курсе, молодость требовала удовлетворения. По словам инспекторского журнала, «в генваре месяце Лобачевский первый оказался самого худого поведения. Несмотря на приказание начальства не отлучаться из университета, он в новый год, а потом еще раз, ходил в маскарад и многократно в гости, за что опять наказан написанием имени на черной доске и выставлением оной в студентских комнатах на неделю. Несмотря на сие, он после того снова еще был в маскараде». Студенческая жизнь Лобачевского отличалась вообще несколько бурным характером, но из среды своих сверстников он выдавался далеко вперед как по уклонениям от тогдашних правил благоповедения, вызывавшим карательные меры против него, так и по своим дарованиям и успехам в математике. Вот почему только о нем одном дошло до нас историческое изображение поведения его; проступки Лобачевского называются достопримечательными, характер — упрямым, нераскаянным, «весьма много мечтательным о самом себе».

Эпизодов, раздражавших инспектора, было много. Но Лобачевский не оставался в долгу. Он пускал в студенческую среду эпиграммы на Кондырева и различные насмешки, которые доходили до свирепого помощника инспектора. Вот что об этом рассказывает Янишевский: [1]

«Кондырев действительно был смешон; будучи еще молоденьким студентом и находясь под покровительством Яковкина, который произвел его сначала в кандидаты, а потом вскоре (в 1807 г.) назначил помощником инспектора студентов, — Кондырев вообразил себя важным человеком и принял со студентами строгий начальнический тон, который часто смешил студентов, а иногда и выводил из терпения, так как отзывы его о поведении студентов во всяком случае имели большое значение у Яковкина, а Кондырев в своих рапортах инспектору иногда так описывал характер и нравственные качества некоторых студентов, что они не могли не оскорбляться этими рапортами».

Но как бы ни был смешон Кондырев, он был также очень мстителен, и за свои проступки Лобачевский неоднократно подвергался взысканиям. Еще более грозный оборот приняли преследования Кондырева в 1811 г.

---

[1] Э. П. Янишевский. Назв. соч., стр. 6.

Либеральные тенденции Александра I, как известно, скоро сменились неприкрытой реакцией. Как обычно, она с особенной суровостью обрушивалась на просветительные учреждения, на учащуюся молодежь. Университетское начальство получило распоряжение вести строгий надзор за поведением студенчества, а «высочайшим повелением» от 18 мая 1811 г. было предписано студентов, «уличенных в важных преступлениях», исключать из университета и сдавать в солдаты. В эти именно дни Кондырев вносит в кондуит запись, что «мнение Лобачевского получило многие ложные понятия», а затем, что он «в значительной мере явил признаки безбожия». Инспектор внес дело о поведении Лобачевского на обсуждение совета университета. Вопрос о применении в этом случае высочайшего повеления еще не ставится, — Яковкин был достаточно осторожен, но он требовал применения самых решительных мер: нужны «самые побудительные средства со стороны милосердия или строгости, каковые найдет благоразумие начальства». Яковкин и Кондырев еще не предрешали вопроса, но хорошо понимали, к чему это приведет, если совет, как на этом настаивал Яковкин, остановится на мерах строгости. «Шалости, — рассказывает сын Николая Ивановича, — довели его до рекрутского станка; он уже на волосок был от солдатской шинели».

А. В. Васильев высказывал убеждение, что к такого рода взглядам, которые Лобачевскому инкриминировались, он мог притти под влиянием Броннера.[1] Вряд ли это так. Ни из обстоятельных биографических очерков о Броннере в книге Нагуевского, ни из автобиографии Броннера нельзя усмотреть, чтобы он был склонен к атеизму; это вообще не было свойственно иллюминатам. Броннер держал себя очень осторожно и старался отнюдь не обнаруживать своего прошлого. К тому же Броннер приехал в Казань незадолго до этого инцидента. Кроме этого обвинения со стороны Кондырева, мы не имеем прямых оснований считать, что Лобачевский был склонен к атеизму, особенно в эту пору его жизни. С уверенностью можно только сказать, что Лобачевский принадлежал к передовой молодежи, потому что «благонадежные» студенты ни в какие времена не преследовались и в «ложном направлении понятий» не обвинялись. Очень вероятно, что на

[1] А. В. Васильев. Броннер и Лобачевский. Казань, 1893.

умонастроение Лобачевского еще в гимназические годы оказывал влияние Карташевский — человек действительно свободной мысли.

Как бы то ни было, заседание совета, повидимому, протекало бурно: на защиту Лобачевского стали Бартельс и Броннер, и дело окончилось сравнительно благополучно. Вот что по этому поводу позже (в 1812 г.) Броннер писал попечителю М. А. Салтыкову, преемнику Румовского: [1]

«У этого человека [Яковкина] на устах всегда слова высокой морали; делается это для того, чтобы проводить свои аморальные намерения, в особенности же для того, чтобы своими обвинениями губить самостоятельных и способных юношей. Так, он из-за пустяков чуть было не погубил и не опорочил наилучшего воспитанника университета Николая Лобачевского, внутренние побуждения которого собственно заслуживали только похвалы. Лишь с большим трудом нам удалось его спасти».

В свое время дело все же дошло до Румовского, который ограничился следующим резким выговором: [2]

«Студенту Николаю Лобачевскому, занимающему первое место по худому поведению, объявить мое сожаление о том, что он отличные свои способности помрачает несоответственным поведением, и для того, чтобы он постарался переменить и исправить оное; в противном случае, если он советом моим не захочет воспользоваться и опять принесена будет жалоба на то, тогда я принужден буду донести о том до сведения господина министра просвещения».

Нужно, однако, сказать, что обвинение в безбожии, как мы увидим, всплывало и в дальнейшем и приносило Лобачевскому немало неприятностей.

Между тем в совете университета рассматривались дела о проведении некоторых лучших студентов в магистры. Когда с вопросом о тяжком обвинении против Лобачевского было уже покончено, Бартельс, Броннер и Реннер возбудили ходатайство о возведении в степень магистра также Н. И. Лобачевского и И. М. Симонова. Совет это предложение принял. Правда, Лобачевский подвергся при этом довольно унизительной процедуре: в собрании совета он должен был принести покаяние в своем дурном поведе-

[1] Д. И. Нагуевский. Броннер, стр. CCLXII и 383.
[2] Н. П. Загоскин. Назв. соч., стр. 303.

нии и обещать полное исправление. Как бы ни подчинялся Румовский влиянию Яковкина, но он несомненно дорожил талантливыми молодыми людьми; 7 августа 1811 г. он утвердил постановление совета о возведении Лобачевского в степень магистра.

Студенческие годы Н. И. Лобачевского фактически кончились (формально магистры в ту пору числились еще студентами). Он прошел очень хорошую школу, приобрел обширные разносторонние познания не только в математике, но и в физике и астрономии; он приобрел друзей и руководителей в учителях, проникнутых любовью к науке и стремившихся создать солидную математическую школу. Н. И. Лобачевский был первенцем этой школы и остался самым славным ее представителем.

ДО ОТКРЫТИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

IV. Первые шаги Лобачевского в его научной и педагогической деятельности

По уставу университета магистры должны были, с одной стороны, готовиться к научной и профессорской деятельности, а с другой — быть помощниками профессоров. Тем и другим Лобачевский занялся весьма энергично. Одновременно с ним к повышению в магистры был представлен И. М. Симонов. Это был почти сверстник Лобачевского, человек, несомненно не лишенный дарований; если Лобачевский был преимущественно учеником Бартельса, то Симонов в том же смысле был учеником астронома Литтрова. Позже он занял в Казанском университете кафедру астрономии. Математике оба молодых магистра учились у Бартельса, который приватным образом занимался с ними у себя на дому. Вероятно потому, что в этой небольшой аудитории у Бартельса занимались математик и астроном, он выбрал в качестве основного сочинения, над которым молодые люди должны были работать, «Небесную механику» Лапласа;[1] это очень серьезный труд в пяти томах, приведший в единую систему исследования Ньютона, Даламбера, Клеро, Эйлера и самого Лапласа; этим произведением, по существу, создана дисциплина, сохранившая в своем развитии и по настоящее время название «небесной механики». Сочинение было вы-

[1] M. de Laplace. Traité de mécanique céleste. Paris, I—III, 1802; IV, 1805; V, 1825.

брано чрезвычайно удачно по разносторонности образования, которое оно принесло изучавшим его магистрам. «Главным образом в приложениях анализа к системе мира, — говорит Лаплас в предисловии к третьему тому, — проявляется мощь этого чудодейственного инструмента, без которого было бы невозможно проникнуть в этот механизм, сложный в своих проявлениях, хотя и простой по вызывающим его причинам». В первое десятилетие прошлого века это сочинение стояло в центре внимания математиков, особенно тех, которые занимались прикладной математикой. Первый том его содержит механику (статику и динамику) системы материальных точек, твердых и жидких тел, учение о силе всемирного тяготения, о движении системы тел под действием этой силы, в частности, о движении тел солнечной системы с учетом так называемых пертурбаций. Второй том заключает в себе учение о фигурах небесных тел и о колебаниях, происходящих в океане и в атмосфере. Эти два тома наши магистры изучали под руководством Бартельса. Вот что об этих занятиях писал Бартельс в своем рапорте совету университета от 10 июля 1812 г. на латинском языке: [1]

«Как Вам, высокочтимые и славные мужи, известно, я в начале настоящего учебного года принял на себя обязанность руководить углубленным образованием гг. магистров Лобачевского и Симонова и представить Вам отчет об их занятиях. Я с тем большей охотой представляю этот отчет, что счастлив успехом своей работы. В моих приватных занятиях с ними я разъяснял им большую часть первого и значительную часть второго тома замечательного сочинения, автором которого является преславный Лаплас; наши магистры не только занимались этим с замечательным прилежанием, но, где возможно, старались самостоятельно продвинуться в вопросе. Их разработки вопросов небесной механики прилагаю к настоящему отчету и полагаю, что они подтвердят сказанное выше».

К сожалению, эти материалы в архиве университета не сохранились. Уделив далее некоторое место отзыву о Симонове, Бартельс продолжает: «Хотя Симонов в матема-

[1] Латинский текст этого отзыва я нашел в неизданной книге Васильева «Жизнь и научное дело Лобачевского».

46-2

тике хорошо продвинут, все же Лобачевский в этом его превосходит, особенно в высших ее разделах. Из его сообщения, разработанного им без чьей бы то ни было помощи, помимо самого произведения славного Лапласа, видно, что он не только изучил содержащиеся в этом сочинении материалы, но сумел подкрепить их своими собственными идеями. В этом кратком сообщении нашего выдающегося математика, который со временем не может не заслужить славного имени, имеются указания, излагать которые здесь вряд ли уместно».

Проницательный взгляд Бартельса ясно видел, таким образом, какой талант скрывался в его ученике.

Если книга Лапласа в ту эпоху стояла в центре внимания аналистов, то представителей алгебры и теории чисел чрезвычайно занимало другое замечательное сочинение — первый труд молодого Гаусса «Арифметические исследования» (Disquisitiones arithmeticae), который появился в свет в 1801 г. Это сочинение состоит из трех частей, первая из которых (разделы I—IV) посвящена так называемой теории сравнений, вторая (разделы V и VI) — теории бинарных и отчасти тернарных форм с целочисленными коэффициентами, а третья, тесно связанная с двумя первыми, — учению о двучленных уравнениях, точнее, учению о так называемых «уравнениях деления окружности», т. е. уравнениях вида $x^n - 1 = 0$. По сообщению Н. Н. Булича,[1] Бартельс специально с Лобачевским занимался изучением этого сочинения. «Имеются указания, — говорит по этому поводу Загоскин,[2] — что предметом приватных занятий Бартельса с Лобачевским служила арифметика Гаусса и первый том «Небесной механики» Лапласа». Об этом необходимо сказать с большей определенностью. Именно, не может подлежать сомнению, что Лобачевский под руководством Бартельса занимался также «Арифметическими исследованиями» Гаусса. В предисловии к своей «Алгебре» Лобачевский пишет:

«Разложение двучленных уравнений на производители делает много чести изобретателю. От остроумия г. Гаусса однакож укрылось то свойство корней в этого рода уравне-

[1] Н. Н. Булич. Из первых лет Казанского университета, ч. I, стр. 248; А. В. Васильев. Жизнь и научное дело Лобачевского, стр. 24.
[2] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, стр. 304.

Theoria motus corporum coelestium. Sect. III.

№ 12

1. Если M есть средняя аномалия, E эксцентрическая, а e эксцентриситет, то будет

$$E = M + e \sin E$$

Если φ есть любой угол и φ будет тот же угол в круге, описанном радиусом $= 1$, а E есть площадь этого сектора $= \frac{1}{2} x$, где x есть длина дуги этого сектора, то x будет равно двойной площади $\frac{1}{2} x$ этого сектора, а $\frac{1}{2} x$ будет равно площади треугольника, которое будет $= \frac{1}{2} \sin \varphi$, а $\frac{1}{2} x$ будет равно площади сектора, которое будет $= \frac{1}{2} E$, следовательно

$$\sin(E + x) = \sin E = \frac{\lambda x}{\mu}$$

Это выражение может служить для определения x, если λ и μ будут известны. Когда угол E определен, то

$$M + e \sin E = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (M + e \sin E - E)$$

2. Если эксцентриситет $= e$, v, φ (φ есть угол между v и φ), а $r = \sin \varphi$, то будет

$$\frac{dE}{\sin E} = \frac{dv}{\sin v} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

$$dM = (1 - e \cos E)\, dE = \sin E \cos \varphi \, d\varphi$$

$$dM = \frac{\sin E \cdot (1 - e \cos E)}{\sin v} \cdot dv - \left(\sin E \cdot \cos \varphi + \frac{\sin E (1 - e \cos E)}{\cos \varphi} \right) d\varphi$$

$$dM = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} \cdot dv - \frac{r \cdot (r + \varphi) \sin v}{a^2 \cos \varphi^2} \cdot d\varphi$$

$$dM = \frac{\cos \varphi^3}{(1 + e \cos v)^2} \cdot dv - \frac{(2 + e \cos v) \sin v \cdot \cos \varphi^2}{(1 + e \cos v)^2} \cdot d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} dM + \frac{(2 + e \cos v) \sin v}{\cos \varphi} \cdot d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} dM + \frac{a^2}{r^2} (2 - e \cos E - e^2) \sin E \, d\varphi$$

Когда угол φ равен π, v, φ и M, $\varphi = \rho$, тогда будет

$$\frac{dx}{r} = \frac{d\varphi}{\rho} + \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} dv - \frac{\cos \varphi \cos v}{1 + e \cos v} d\varphi$$

и так как $\frac{d\varphi}{r} = \frac{da}{a} = 2 \tan \varphi \cdot d\varphi$, то

$$\frac{dx}{r} = \frac{da}{a} + \frac{r}{a} \tan \varphi \sin v \cdot dM - \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v \, d\varphi$$

$$dx = \frac{x}{a} da + a \tan \varphi \sin v \cdot dM - a \cos \varphi \cos v \, d\varphi$$

3. Теперь определим дифференциал времени через угол между радиусом-вектором v, M, E будет равен дифференциалу времени $E = M + e \sin E$ помноженному на дифференциал $E - M$ будет равен $E = \varphi$, а $E - M$ будет равно $v = \varphi + \varphi$. Когда $E - M$ будет равно

$$E - M = \text{максимум}; \quad v - E = \varphi \; ; \quad v - M = \varphi + e$$

Конспект Н. И. Лобачевского работы Гаусса «Теория движений небесных тел».

ниях, которое дозволяет значения их находить, не прибегая к решению полных уравнений. Еще в 1813 г. представлял я в Отделение физико-математических наук при Казанском университете рассуждение, которого содержание помещено здесь в главе XVI». [1]

Задача, которую ставит себе Гаусс в последнем разделе, «Об уравнениях, определяющих деление круга», заключается в разыскании корней двучленного уравнения

$$x^n - 1 = 0; \qquad (1)$$

по выделении множителя $x - 1$ это сводится к разысканию корней уравнения

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \ldots + x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Задача требует разложения левой части этого уравнения на множители; это и составляет основной предмет исследования последнего раздела. Исчерпывающего решения задачи Гаусс не дает, это было сделано значительно позже. Но он указал ряд случаев, для которых решение уравнения (1) доводится до конца; в частности, он дает полное решение уравнений

$$x^{19} - 1 = 0; \qquad x^{17} - 1 = 0. \qquad (3)$$

В то время как решение первого сводится к двум полным уравнениям 3-й степени и одному квадратному, решение уравнения $x^{17} - 1 = 0$ приводится к четырем квадратным уравнениям. Это и привело к возможности вписать в круг правильный 17-угольник циркулем и линейкой — знаменитый результат, который, по завещанию Гаусса, начертан на его надгробном памятнике. Лобачевский указывает, что разложение многочлена, составляющего левую часть уравнения (2), на множители иногда может быть достигнуто без решения полных уравнений высших степеней, с которым это обыкновенно связано. Он дает для этого своеобразный прием, который он применяет, однако, только к уравнению $x^{11} - 1 = 0$ и ко второму из уравнений (3); эти уравнения уже были рассмотрены Гауссом. Придавать этой работе Лобачевского большое значение, таким образом, нельзя; но нужно

---

[1] Н. И. Лобачевский. Алгебра или вычисление конечных. Казань, 1834.

помнить, что Лобачевскому в то время было только 19 лет.

Мы видим, таким образом, что, с одной стороны, Бартельс заставлял Лобачевского изучать наиболее серьезные в ту пору современные научные произведения и что, с другой стороны, Лобачевский с этими сочинениями не только успешно справлялся, но и находил в каждом из них материал для самостоятельного размышления и исследования. Вместе с тем нужно указать, что аналист Бартельс давал Лобачевскому для изучения только книги аналитического содержания, геометрических сочинений в программе образования Лобачевского не было. В указаниях, которыми мы располагаем относительно занятий Лобачевского в эти годы, мы нигде не встречаем ни имени Лежандра, ни имени Монжа, возглавлявших в то время школу французских геометров. Эти имена появляются в отчетах Лобачевского позже, он пришел к этим авторам, повидимому, самостоятельно.

В те же годы начинаются и первые шаги Лобачевского в деле преподавания. Магистры должны были заниматься со студентами повторением пройденного, — конечно, не в часы, назначаемые для лекций. Это было тем более необходимо, что многие профессора преподавали на иностранных языках, которые молодым студентам были мало доступны. Магистры получали за такие занятия особое вознаграждение. Подобные занятия вел и Лобачевский, но какими-либо конкретными сведениями о них мы не располагаем.

Была у Лобачевского в эти годы и более ответственная работа педагогического характера. Чтобы повысить образовательный ценз чиновников различных государственных учреждений, в 1809 г. при Казанском университете был учрежден «экзаменный» комитет, в котором должны были экзаменоваться лица, подлежащие производству «в восьмиклассный чин». Вместе с тем были открыты публичные летние курсы для чиновников, находившихся уже на службе, для того чтобы те из них, которые не имели возможности приготовиться к экзамену дома, могли бесплатно слушать курс тех наук, по которым они должны будут экзаменоваться. Очень любопытно, что первыми явившимися для экзамена в Казанский университет в 1809 г. были будущие попечители Казанского учебного округа М. Н. Мусин-Пушкин и В. П. Молоствов.

Н. И. Лобачевскому в 1812 г. было поручено чтение на этих курсах арифметики и геометрии. Собственно сначала это поручение получил младший его брат Алексей Иванович, но он уехал в Москву, и чтение этих курсов было передано сначала неофициально Николаю Ивановичу. «Но полнота, отчетливая ясность изложения в преподавании Н. И. Лобачевского тогда же обратили на него особенное внимание, и в следующем году он уже официально был назначен вместо Алексея Ивановича преподавателем публичных курсов арифметики и геометрии совместно со своим учителем Бартельсом».[1]

V. Первые успехи Казанской математической школы

26 марта 1814 г. Лобачевский был возведен одновременно с Симоновым в звание адъюнкта физико-математических наук (по современной терминологии — доцента); он официально становится преподавателем университета; от чтения элементарных предметов чиновникам он переходит к преподаванию студентам; ученик Бартельса и Броннера становится их младшим товарищем. Конечно, по началу он еще всецело остается под их влиянием, особенно Бартельса, — и это не плохо, потому что Бартельс был превосходным преподавателем. Влияние это было тем сильнее, что через полгода после повышения Лобачевского в адъюнкты Бартельс был выбран деканом физико-математического факультета и в этой должности оставался свыше пяти лет, до самого своего отъезда в Дерпт. Молодой адъюнкт развертывает значительную преподавательскую работу, — дела было достаточно.

Как мы видели, вначале разделения университета на факультеты не существовало. По мере того, однако, как замещались кафедры и появились специалисты по различным отраслям науки, такое подразделение естественно становилось необходимым. Первые шаги в этом направлении относятся к 1812 г. К этому времени в составе преподавательской коллегии университета состояло уже 17 профессоров и 6 адъюнктов; в числе их было пять преподавателей физико-математических наук: к четырем изве-

[1] Э. П. Янишевский. Назв. соч., стр. 10.

стным нам профессорам (Бартельсу, Броннеру, Литтрову и Реннеру) присоединился еще адъюнкт Г. Б. Никольский. Несколько слов об этой личности, игравшей также значительную роль как в жизни Казанского университета, так и в судьбе Лобачевского.

Никольский состоял студентом Петербургского педагогического института, где и выдвинулся своими математическими способностями и на экзаменах, на которых присутствовал Румовский, обратил на себя его внимание. В 1808 г. он окончил институт, и Румовский тотчас определил его в Казанский университет магистром, поручив его особому вниманию Бартельса для подготовки к званию адъюнкта математики. Бартельс, в свою очередь, был сначала в восторге от даровитого ученика, дал попечителю о нем блестящий отзыв и предсказывал ему выдающуюся будущность на научном поприще. Однако ожидания Румовского и Бартельса не сбылись. Никольский скоро стал на путь административно-практической деятельности и сделал в дальнейшем крупную, — чтобы не сказать блестящую, — карьеру администратора; на научном же поприще он не выдвинулся, а по своей неразборчивости в средствах и неприкрытому карьеризму оставил по себе мало приятные воспоминания в Казанском университете. Однако в первое время он старался приноравливаться к настроениям своих ближайших товарищей и преподавание вел с успехом. О дальнейшей его деятельности нам не раз придется говорить.

С присоединением к пяти штатным преподавателям физико-математических наук магистров Лобачевского и Симонова образовался уже далеко не заурядный коллектив преподавателей физико-математических наук. Если на других отделениях дело обстояло не столь благоприятно, то и на них во всяком случае возникал вопрос об организации соответствующих факультетов, и в 1812 г. были приняты меры в этом направлении. Официальное оформление факультетов временно задержалось: началась отечественная война, администрация и общество были захвачены более актуальными насущными интересами. Эвакуация Москвы привела в Казань ряд учреждений, занявших помещения; ожидался даже приезд Московского университета; не время было заниматься коренной реорганизацией Казанского университета.

Однако событие, очень важное для Казанского универ-

ситета, направило его жизнь на новый путь: 8 июля 1812 г. скончался С. Я. Румовский. Попечителем Казанского учебного округа был назначен М. А. Салтыков, представлявший во многих отношениях полную противоположность Румовскому. Это был человек знатного происхождения, камергер двора, с большим влиянием, не ученый, конечно, но все же прогрессивного образа мыслей и искренне желавший служить делу широкого развития просвещения России. Он был в расцвете сил (ко времени назначения ему исполнилось 43 года) и решил поселиться в Казани, чтобы на месте руководить округом и университетом. Но что самое важное, Салтыков был человек самостоятельный, отнюдь не склонный слепо подчиняться чьему-либо влиянию. Немедленно после его вступления в исполнение обязанностей на него начался нажим с двух сторон: Яковкина, официального руководителя университета, и Броннера, человека, связанного с прежним попечителем и теперь говорившего от имени профессорской коллегии, хотя и не всегда отличавшейся полным единодушием. Приехав в Казань, Салтыков воочию убедился, какой глубокий вред причинил университету Яковкин своим самовластным управлением, в какое дурное состояние он привел его учреждения и помещения, как он запутал его делопроизводство и даже финансы, а главное, какое развращающее влияние он имел на профессорскую коллегию, которую сознательно раскалывал в своих интересах. Салтыков уяснил себе, что было мало устранить Яковкина от управления университетом, что нужно было ввести университет в те нормы, которые были предначертаны уставом. Прежде всего было давно необходимо установить полную автономию университета, который попрежнему управлялся общим советом с гимназией. Разделение их не было в интересах Яковкина, и этого было достаточно, чтобы университет существовал «при гимназии». Об этом с полной откровенностью говорит даже сторонник Яковкина, преподаватель гимназии Владимиров в своем труде, посвященном истории Казанской гимназии. «Румовский с полной готовностью старался удовлетворить всем желаниям Яковкина по управлению университетом и гимназией, и вот, конечно, причина, почему при жизни Румовского не был открыт университет с совершенным отделением от него гимназии, чрез что, конечно, Яковкин должен был лишиться звания инспектора сту-

дентов университета и многих выгод по службе».[1] Салтыков уяснил себе все это, добился «полного открытия» и независимости Казанского университета; это было главной его заслугой. По его представлению совет университета был выделен из объединения с советом гимназии, были четко организованы факультеты, по которым и составлялся теперь план преподавания. Уже в заседании совета 4 сентября 1813 г. состоялись выборы всех должностных лиц; ректором университета был выбран профессор анатомии И. О. Браун, деканом физико-математического факультета М. Ф. Бартельс, который оставался на этом посту до самого своего отъезда из Казани. Казанский университет зажил полной жизнью высшего учебного заведения. Отнюдь нельзя сказать, чтобы жизнь эта протекала вполне благополучно. Слишком еще свежи были традиции Яковкина, слишком глубоко созданные им формы жизни университета внедрились во все стороны его существования. Университет разъедала борьба группировок, среди которых немецкая партия имела большое и нередко скверное влияние. Но при всем том в жизни университета это была полоса большого подъема. На физико-математическом факультете к прежнему его составу, как уже сказано, в начале 1814 г. присоединились Лобачевский и Симонов. Нужно сказать, что состав преподавателей на физико-математическом факультете был превосходный и, что важнее всего, на этом факультете не было группировок. Не все были людьми одинаковой академической и моральной высоты, но тон задавали Бартельс и Броннер — люди, чрезвычайно добросовестно относившиеся к своим обязанностям, выдающиеся педагоги, искренне преданные интересам университета. Физико-математическая школа Казанского университета вступила в период первого расцвета своей педагогической деятельности. В этой школе рос Лобачевский; из талантливого магистра, подававшего надежды, вырабатывался серьезный преподаватель, самостоятельно мысливший, много работавший, неустанно думавший над тем, что́ ему приходилось преподавать, и это дало плоды не только педагогического, но и научного значения.

С момента назначения адъюнктом Лобачевский читал ответственные курсы студентам: элементарную математи-

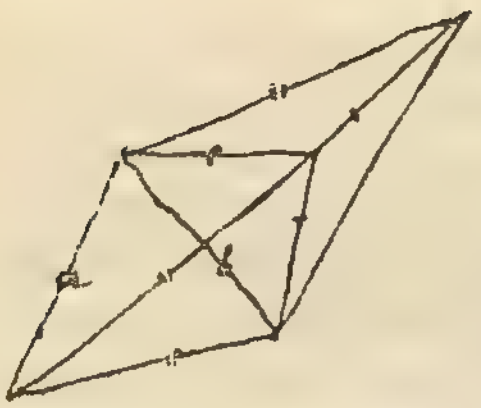
---

1 В. Владимиров. Историческая записка, ч. 2, отд. 2, стр. 41.

ку (арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, плоскую и сферическую), теорию чисел, дифференциальное и интегральное исчисления. По университетским правилам того времени требовалось, чтобы профессор указывал сочинения, «по которым он читает каждый курс», т. е. которые могут служить студентам пособиями для его усвоения. Если профессор составлял курс самостоятельно, то ему вменялось в обязанность письменно его излагать, хотя бы в виде конспектов; в обозрении преподавания в этом случае отмечалось, что профессор читал «по своим гетрадям». Курс элементарной математики имел в ту пору в университете большое значение, потому что подготовка, с которой студенты приходили в университет, была очень слаба. Лекции по различным разделам этого курса Лобачевский всегда читал «по своим тетрадям». Повидимому эти именно курсы служили для Лобачевского предметом особенно тщательной разработки, наводили его на размышления об обработке основ математики. Эти курсы, вероятно, и привели Лобачевского к составлению двух учебных руководств — «Геометрия» и «Алгебра или вычисление конечных»; мы к ним придем ниже.

Курс теории чисел Лобачевский читал по Гауссу («Disquisitiones arithmeticae») и Лежандру («Essai sur la théorie de nombres»); это были свежие сочинения, бывшие в то время в большом ходу. Наконец, основы анализа Лобачевский читал по Лакруа и Монжу. О книге Лакруа нам уже приходилось выше упоминать (стр. 33). Это был доступный курс, пользовавшийся большим распространением не только в Германии, но и во всей Европе. Что касается Монжа, то руководства по анализу этот геометр не издавал. Повидимому речь идет о его курсе приложений анализа к геометрии.[1] Нужно, однако, сказать, что это сочинение было мало доступно студентам, в особенности при той подготовке, которую они в то время имели. Обращает на себя внимание, что среди книг, которые Бартельс рекомендовал Лобачевскому, а этот последний своим студентам, не было вовсе сочинений Эйлера, которые в качестве руководств по анализу пользовались в то время широким распространением и очень высоко

[1] G. M o n g e. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris, 1795. Курс лекций, из которого выработалось сочинение «Application de l'analyse à la géométrie», ныне вышедшее в русском переводе.



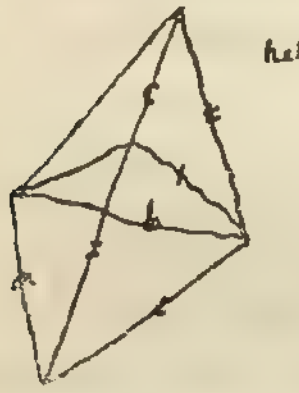
$$\frac{B^2+C^2-a^2}{B} = \frac{(B-C)^2+C^2-c^2}{B-C}$$

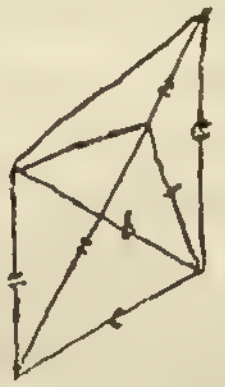
$$\frac{B^2+A^2-c^2}{B} = \frac{A^2}{B-C}$$

$$\frac{(B-C)^2+c^2-C^2}{(B-C)c} = \frac{A^2+C^2-b^2}{AC}$$

$$(B-c)^2+c^2-b^2+Ac=0$$

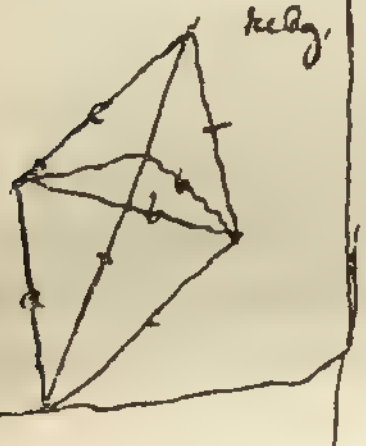
$C' = A+c$
$A' = B-c$
$B' = b$





$A = c$
$B = \sqrt{c^2+c^2-b^2}$
$C = a$ ...

$A' = b$
$B' = a$
$C' = \sqrt{a^2+b^2-c^2}$



$A^2+BB = c^2$

$$\frac{-bB+c^2-p^2+b^2}{B-b} = \frac{c^2-a^2}{B}$$

$$\frac{(B-b)^2+p^2-c^2}{p\cdot(B-b)} = \frac{b^2+A^2-p^2}{bA}$$

$$\frac{p^2+A^2-b^2}{p} + \frac{aA^2-(B-b)^2}{A} = 0$$

$A' = B-b$
$B' = p$; $C' = A+p$

$A = c$
$B = 2b$
$C = \sqrt{c^2-b^2}$

$A' = b$
$B' = \sqrt{c^2-b^2}$
$C' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2-c^2}$

$a = 7b^2-3c^2$

Страница из черновых рукописей Н. И. Лобачевского по геометрии.

ценились.[1] Эйлер был членом русской Академии Наук, провел в Петербурге с перерывами свыше 30 лет, традиции его были в нашей столице очень сильны, и учебные книги этого великого математика не могли быть незнакомы преподавателю университета. Но не случайно, конечно, Бартельс и Лобачевский о них в своих проспектах почти не упоминают: по своим установкам, по подходу к учению о бесконечно малых сочинения Эйлера были для них уже пройденным этапом; Бартельс и Лобачевский принадлежали уже к школе Коши и Гаусса, а не Эйлера; это выясняет многое в самой постановке тех вопросов, которые занимали Лобачевского, в том их решении, к которому он пришел.

Период сравнительно спокойной жизни университета вообще, и математической группы в частности, продолжался недолго — всего пять лет. Но на эти именно годы падают первые замыслы Лобачевского, относящиеся к обоснованию геометрии. Вряд ли может подлежать сомнению, что они были связаны с курсом элементарной геометрии, которую он читал.

В 1819 г. по поручению министерства была произведена ревизия деятельности Казанского университета. М. Л. Магницкий, производивший эту роковую для университета ревизию, затребовал, между прочим, сведения о сочинениях, изданных членами университета, и о хранящихся у них рукописях. В представленном ему перечне имеется следующая запись:[2] «П. э. профессор[3] чистой математики Н. И. Лобачевский сочинил основание геометрии и несколько рассуждений о высшей математике, которые еще не изданы».

Обстоятельства суровой ревизии были таковы, что допустить какую бы то ни было неосторожность или неточность в представленных сведениях вряд ли было возможно. Нужно поэтому считать совершенно достоверным, что весной 1819 г. у Лобачевского была рукопись составленного им сочинения «Основание геометрии». Но никаких сведений о содержании и характере этого сочинения, а также о дальнейшей судьбе его мы не имеем. Что же это

---

[1] L. Euler. Introductio in analysin infinitorum. Lausannae, 1748.

[2] Подлинник перечня, представленного Магницкому, хранится в архиве Казанского университета; «Дело попечителя Казанского округа за 1819 г., № 1, лл. 223—235 и 238.

[3] Т. е. публичный экстраординарный профессор.

могло быть за произведение? Прежде всего здесь возникает вопрос, был ли это первоначальный вариант «Геометрии», учебника, представленного Лобачевским к напечатанию в 1823 г., или рассуждение об обосновании геометрии? Первое предположение более вероятно по следующим соображениям. Термин «основания геометрии» в смысле рассуждений о логическом ее обосновании имеет как у нас, так и на Западе гораздо более позднее происхождение. Сам Лобачевский нигде в своих сочинениях не пользуется этим термином в таком его значении. Между тем учебные руководства, содержавшие начала различных наук, в то время систематически получали название «Основания». Так, многочисленные учебные руководства академика С. Е. Гурьева все неизменно носят название «оснований» («Основания арифметики», «Основания геометрии», «Основания механики», «Основания дифференциального исчисления» и т. д.). Учебник математики Н. И. Фусса имеет заголовок «Начальные основания чистой математики». Русский перевод учебника Кестнера также носит название «Начальные основания математики». Таких примеров можно было бы привести еще много. Нужно поэтому считать достоверным, что уже в начале 1819 г. у Лобачевского была рукопись составленного им сочинения, которое содержало изложение основных начал геометрии. То обстоятельство, что сочинение, представленное им к напечатанию в 1823 г., носило несколько иное название — «Геометрия», заставляет думать, что оно было значительно переработано.

На этом учебнике нам придется остановиться подробнее (гл. VII—IX). Здесь же отметим только, что построение его очень существенно отличается от обычной структуры курса элементарной геометрии. Не подлежит поэтому сомнению, что в молодые годы Лобачевский уже размышлял над вопросом о построении курса геометрии и склонялся к мысли, что оно нуждается в коренном преобразовании.

VI. Эпоха Магницкого

Мы видели выше, что реакционные тенденции, проявленные правительством Александра I уже в десятых годах прошлого века, оказали влияние на жизнь университетов, в том числе и Казанского; на первых порах оно выразі-

лось в репрессиях против неблагонадежных студентов. Жесточайшая общая реакция, охватившая в Европе все стороны жизни, резко отразилась и на русской общественной жизни. То было одним из проявлений мрачной эпохи общеевропейской реакции, которая на Западе торжествовала победу над революцией. Русская реакция приняла характер особенно уродливого и тупого гнета. О ней хорошо сказал Булич в своих «Очерках по истории русской науки и просвещения»: [1]

«Нет поэтому явления печальнее, бесплоднее и нелепее русской реакции во вторую половину царствования Александра. Она превратилась в печальный обскурантизм и преследование мысли, слова и науки. Едва начинающееся слабое развитие общественное было приостановлено надолго».

Своего апогея разгул европейской реакции достиг после заключения знаменитого «священного союза» императорами русским и австрийским и королем прусским в 1815 г. Союз этот превратился в международную организацию, преследовавшую всякую свободную мысль, малейшие демократические или даже либеральные течения в общественной жизни. Это был союз трех монархов против своих народов. Он скоро вызвал в Европе всеобщую ненависть. Отдельные взрывы возмущения против установившегося гнета, разрозненные и беспомощные индивидуальные выступления вызвали еще более ожесточенные репрессии. Убийство студентом Зандом реакционного германского писателя Коцебу (одно время политического шпиона в России), покушение аптекаря Карла Лепинга на президента фон-Ибелля привели в озлобление реакцию и вызвали ожесточенные гонения против либеральной интеллигенции и университетов, в которых она «получает питание». Австрийское правительство во главе с вождем европейской реакции Меттернихом созвало представителей немецких государств в Карлсбад для совещания о противодействии общими силами «угрожающей отовсюду опасности». Меттерних настаивал на тесном объединении немецких государств для борьбы с революционными тенденциями, к которым относили даже самые умеренные либеральные настроения. В качестве неотложно необходимых меропри-

[1] Н. Н. Булич. Очерки по истории..., т. II, стр. 231.

тий были признаны немедленное обнародование правительствами единообразных постановлений по делам печати и чрезвычайные меры в отношении к университетам, гимназиям и даже начальным школам. Профессора и преподаватели какого бы то ни было учебного заведения, лишь только они будут замечены в высказывании мнений, противных существующему порядку и несогласных с постановлениями союза, или станут «морочить юношей мечтательными и призрачными теориями», должны быть немедленно либо преданы суду, либо удалены административным порядком; лица, удаленные таким образом, не могут уже быть терпимы ни в одной из стран германского союза.

Выработанные в Карлсбаде меры были утверждены франкфуртским сеймом, представлявшим союзное правительство; они вошли в силу. Устои, на которых германские университеты держались в течение сотен лет, были уничтожены и с тех пор полностью никогда не были восстановлены. В них воцарились обскурантизм и ханжество. Даже теологические факультеты были взяты под подозрение; «Теология, — говорит одна из записок, относящихся к проведению этих мер,[1] — сделалась первым врагом религии, анатомия думает своим анатомическим ножом проникнуть в святилище души».

Все эти мероприятия, естественно, получили отражение и в России; а так как здесь не было ни влиятельного общественного мнения, ни организованной оппозиции, сам же император Александр после отечественной войны впал в настроение глубокого религиозного мистицизма, то в России они приняли совершенно уродливые формы. Прежде всего министерство народного просвещения было преобразовано в «министерство духовных дел и народного просвещения», чтобы «христианское благочестие было всегда основанием истинного просвещения». При реорганизованном министерстве был учрежден особый «ученый комитет»,[2] главная задача которого заключалась «в поддержании

---

[1] Эта любопытная записка принадлежала русскому дипломату А. С. Стурдзе.

[2] Об этом, помимо сочинений Н. Н. Булича («Очерки по истории литературы и просвещения») и Н. П. Загоскина, см. еще М. И. Сухомлинов. Исследования и статьи по русской литературе и просвещению, т. I, СПб., 1889. Материалы для истории образования в России в царствование Александра I, гл. III—V.

постоянного и спасительного согласия между верою, ведением и властью или, другими выражениями, между христианским благочестием, просвещением умов и существованием гражданским».[1] Этим комитетом[2] «духовные науки поставлены во главу угла умственного здания и соединяются посредством учения о нравственности и теории права с науками антропологическими. Последние не смешаны с наукою природы, дабы тем указать на высокий сан и достоинство человека, душою и умом своим обреченного богу, и одним только телесным сложением своим соединенного с вещественным миром». Этими словами вполне определилось то направление, по которому тогда пошло дело народного просвещения в России. Во главе преобразованного министерства был поставлен кн. А. Н. Голицын, в лице которого по самому статуту реформы соединялись в одно должности обер-прокурора синода, управляющего иностранными исповеданиями и министра народного просвещения. Беспросветное господство мистики, стремление подчинить всю умственную жизнь страны самой мелочной регламентации и гнетущему шаблону — такова была политика министерства Голицына. В малейшем самостоятельном движении мысли, даже в области наиболее отвлеченных дисциплин, усматривалось преступление против существующего строя и религии. Услужливые клевреты делали отсюда далеко идущие выводы; самое существование университетов стояло под угрозой. М. А. Салтыков, который к этим новым течениям относился отрицательно и рано предвидел, к чему они приведут, еще в 1817 г. подал в отставку. Он писал из Петербурга Броннеру: «Более нежели вероятно, что за исключением Московского все остальные наши университеты будут упразднены; вопрос о закрытии университетов Казанского и Харьковского уже поставлен на очередь».

Поводом для травли Казанского университета послужил ряд неблагоприятных сторон, которые действительно имелись в его работе: неизжитые еще последствия деятельности Яковкина, склока и распри, осложнявшие работу совета; недостойное порою поведение некоторых иностранных профессоров и т. д. Целый ряд инцидентов индивидуального, иногда даже случайного характера был

---

[1] М. И. Сухомлинов. Исследования и статьи, т. I, стр. 195—196.
[2] Там же, стр. 196.

хорошо известен в министерстве. Казанский университет представлялся наиболее благоприятным плацдармом для того, чтобы начать кампанию против университетов, тем более что обоих первых попечителей этого университета относили к числу либералов. И университет скоро был отдан в руки нового властителя — отъявленного и притом могущественного мракобеса.

Министр Голицын со своими мистическими настроениями не был человеком самостоятельным; два лица были главными его вдохновителями: попечитель Петербургского учебного округа Д. П. Рунич и член главного правления училищ М. Л. Магницкий, сыгравший в эту эпоху наиболее пагубную роль в политике просвещения, в частности, приведший в состояние полного упадка молодой Казанский университет.

25 января 1819 г. последовало высочайшее повеление о назначении Михаила Леонтьевича Магницкого членом главного правления училищ, а непосредственно вслед за этим он получил поручение «отправиться в Казань для обозрения тамошнего университета и училищ того округа». Период деятельности Магницкого — это не только эпоха в жизни Казанского университета, это целая мрачная эпоха в истории всего русского просвещения первой половины XIX в. Личности и деятельности Магницкого посвящена довольно большая литература; о нем и его времени обстоятельно рассказано в сочинениях Булича, Загоскина, Сухомлинова, не раз нами цитированных, и других. Интерес представляет посвященная Магницкому небольшая монография Феоктистова.[1]

На основании всех этих исследований облик Магницкого вырисовывается с полною ясностью.

Магницкий происходил из родовитой, хотя и небогатой семьи и отличался безмерным честолюбием. Он начал с военной службы в гвардии, был на дипломатических должностях в Вене и Париже. Сблизившись со Сперанским, он стал его ревностным помощником в разработке проектов реформ, вложив в это дело все свое тщеславие, но очень мало самостоятельного творчества. Эта карьера оборвалась падением Сперанского в 1812 г. Магницкий оказался в ссылке в Вологде, где пробыл до 1816 г. В эпоху реак-

[1] Е. Феоктистов. Материалы для истории просвещения в России. I. Магницкий. СПб., 1865.

ции он снова быстро выдвигается; теперь бывший поборник реформ находит путь к своим целям в проведении политики самого оголтелого обскурантизма.

Таков был человек, который в начале марта 1819 г. явился в Казань с широкими полномочиями по ревизии университета, с твердым намерением сделать на этом деле блестящую карьеру. Поручение, которое он получил, заключалось главным образом в следующем.

«Войти по университету в рассмотрение учебной части, в каком она состоянии, сколько находится учащихся, приносит ли с своей стороны университет ту пользу, какую от учреждения его ожидать должно было, и есть ли действительно надобность, чтоб университет в Казани существовал». [1]

В апреле ревизия была уже закончена, Магницкий возвратился в Петербург и представил доклад о состоянии осмотренного им университета. Трудно представить себе что-либо мрачнее той картины, которую он нарисовал. Как обычно в таких случаях, были обнаружены и реальные дефекты как в экономической стороне, так и в постановке учебного дела. Но Магницкий представил состояние университета в совершенно беспросветном виде. По этому докладу учебная часть находилась в крайнем упадке: «из числа 25 профессоров и адъюнктов не более пяти пользовались уважением и имели влиятельный голос; все остальные были люди «запутанные в делах и неблагонадежные».[2] Разделение наук на факультеты Магницкий нашел неправильным. Кафедры богословия вовсе не было, преподавание философии велось вопреки здравому смыслу и религии. Нашлись студенты, не знавшие катехизиса; для чтения студентов их инспектором были отобраны такие книги, как сочинения Вольтера, а главное — «время уже вникнуть в цель правительства, которое хочет, и хочет непреоборимо, положить единым основанием народного просвещения — благочестие». [3] Далее, с негодованием замечает Магницкий, что «из людей, так образованных, выпущено уже в 15 губерний 43 учителя... Происшедший от сего вред, — говорит он, — весьма важен и, по моему мнению, не скоро исправлен быть может». [4]

[1] Е. Феоктистов. Материалы, стр. 35.
[2] Там же, стр. 36.
[3] Там же, стр. 41.
[4] Там же, стр. 41—42.

Общий вывод был тот, что Казанский университет, «разодрав» дарованную ему грамоту, употребив во вред два миллиона рублей, которые на него были израсходованы, «по непреложной справедливости подлежит публичному уничтожению», т. е. упразднению с публичным оглашением его вины. Однако это предложение не получило одобрения. В защиту Казанского университета выступил с обстоятельной докладной запиской попечитель Петербургского учебного округа (позже министр народного просвещения) С. С. Уваров.[1] Император Александр сделал на докладе надпись «Зачем уничтожить, лучше исправить». Магницкий был назначен попечителем Казанского округа и получил предписание произвести это исправление — «привести все части университета в должный порядок и устройство». Главным правлением училищ были указаны и меры, которыми это должно быть достигнуто.[2] 1) «Ввести при Казанском университете преподавание богопознания и христианского учения (которое с самого начала в предметы университетских преподаваний не было введено), определив для сего наставника из духовных. 2) Некоторых профессоров совершенно уволить от занимаемой ими должности, других перевести на такие кафедры, которые более соответствуют их способностям. 3) Для экономической, политической и нравственной части определить при университете особого чиновника, под наименованием директора, подобно тому как назначено сие при С.-Петербургском университете».

Магницкий не только с усердием осуществил эти директивы, но решил выступить основателем совершенно новой системы образования. Это торжественно декларировалось в речах, в прессе, в приказах и распоряжениях по округу как им самим, так и его клевретами, которых расплодилось очень много.[3] Например, новый ректор, известный нам профессор Никольский, заявил в своей речи: «Дым кладезя бездны и надменные волны лжемудрия, от которых все вещи двинулись с мест своих, коснулись и нашего университета. А потому ни мало не удивительно, что он так скоро и так преждевременно состарился и го-

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. III, стр. 309.
[2] Е. Феоктистов. Назв. соч., стр. 63.
[3] Там же, стр. 65.

тов был умереть двоякою смертью, политической и нравственной. Ему надлежало выпить полную чашу горести, правосудием преподнесенную, до самого дна. От Господа быть сие. Но университет счастливым почесть себя должен, что Господь, наказуя, наказал его, смерти же не предал».[1] Новые судьбы ожидали, по словам оратора, это заведение, когда управление им перешло в руки «истинного сына церкви и отечества».

Во исполнение первого предписания Магницкий прежде всего уволил девять профессоров. Это привело в угнетенное, чтобы не сказать, паническое настроение тех профессоров, которые были пощажены; они должны были стать послушными исполнителями воли Магницкого, на что главным образом мера и была рассчитана. К числу лиц, оказавшихся за бортом университета, принадлежал и пресловутый И. Ф. Яковкин, еще недавно царивший в Казанском университете почти так же самовластно, как теперь Магницкий. Он был отчислен даже без пенсии — «по беспорядкам, найденным в его управлении». Впрочем, после многократных унизительных ходатайств пенсия ему была восстановлена.

Однако многие из тех профессоров, которые были оставлены, главным образом иностранцы, не чувствуя себя прочно на своих постах, в скором времени покинули университет.

Магницкий составил подробную инструкцию для деятельности университета. Одной из первых его забот было подвергнуть строгому рассмотрению университетскую библиотеку и истребить в ней все, что отличалось «вредным направлением». К счастью, отобранные для сожжения книги удалось сохранить, благодаря тому что Магницкий, закончив ревизию, уехал в Петербург и в Казань не возвращался в течение семи лет управления округом; нашелся все же чиновник университета, который запер книги в надежные кладовые.

Магницкий установил также правила, как должна была преподаваться каждая дисциплина, начиная с русской словесности и кончая медициной; были указаны сочинения, по которым все предметы должны преподаваться. Магницкий установил строгую ответственность профессоров за от-

---

[1] Речь, произнесенная в торжественном собрании университета 17 января 1821 г. ректором Никольским.

ступление от этих правил.[1] «Преподавание наук в духе самого строгого благочестия — вот цель, к которой, по словам Магницкого, стремился он неуклонно. Достоинства профессоров определялись не столько их познаниями, сколько тем, в какой мере соответствовало их преподавание указанной цели». Но самая главная реформа попечителя коснулась жизни студентов. Для них был установлен нигде не виданный полицейско-казарменный распорядок.

«Все студенты разделены были по поведению и успехам на три разряда: 1) отличных, весьма хороших и хороших; 2) испытуемых, посредственных, исправляемых и 3) под особым присмотром находящихся. Принадлежавшие к каждому из этих разрядов жили в разных этажах и даже во время завтрака, обеда и ужина отделялись особыми над столами надписями. Они сходились вместе только для слушания лекций, но и тут употреблялись меры для того, чтобы прервать по возможности между ними общение. День проходил обыкновенно таким образом. В 5 часов утра комнатные служители будили студентов звоном колокольчика; через десять минут студенты должны были уже одеться, убрать свои кровати и стоять около них в ожидании прихода помощника инспектора, который обозревал, все ли они находятся на своих местах. Следовала краткая молитва, и по окончании ее надзиратель вел студентов в столовую, осмотрев предварительно их одежду, волосы, обувь. В столовой инспектор приказывал одному из отличнейших студентов, который в тот день был на очереди, читать молитвы по канонику, а затем начинался завтрак, во время которого происходило чтение вслух священного писания. В 8 часов собирались все в главный зал и отправлялись оттуда, под надзором старших, в аудитории, где для каждого назначено было определенное место. Дежурный адъюнкт осматривает аудиторию, за ним являются попеременно инспекторский помощник, инспектор, наконец ректор и директор, последние два не в определенное время, а когда им вздумается. В 12 часов студенты идут из главного зала в том же порядке, который описан выше, в столовую и садятся за обед, в течение которого должны не разговаривать, а слушать чтение евангелия. После обеда, в случае благоприятной погоды, дозволялась кратковременная прогулка

[1] Е. Феоктистов. Назв. соч., стр. 101.

на дворе или в саду. После вечерних лекций и ужина, по окончании вечерней молитвы, студенты шли спать и через десять минут, назначенных для раздевания, не было уже видно огней во всем здании. Тогда начинался ночной надзор. Двое часовых расхаживали в корридорах каждого этажа, навстречу один другому, до самого рассвета; дежурный инспекторский помощник должен был несколько раз осматривать спальни, тогда как обязанность наблюдения за часовыми возложена была, кроме того, на экзекутора». [1]

Останавливаться на том, что должна была принести такая реформа, не приходится. Моральное разложение, вызванное этим режимом, достигло высшего предела. Но самого Магницкого результаты его деятельности приводят в восторг. Много раз он выступал устно и в печати с восхвалением преобразованного им университета. Вот что говорит он в речи, произнесенной в Казани, когда он вновь приехал туда в 1825 г. «Могу сказать, что видел университет, — и университет единственный по своему достоинству, по отличным способностям, по высоким познаниям лиц, почтенное сословие его составляющих; единственный по доброму духу преподавателей, по личной и всему городу, пред которым смело говорю сие, известной их нравственности и благоповедению; единственный по доброму духу, благонравию, скромности, образованности и отличным успехам во всех полезных знаниях студентов. Здесь родители и родственники их [студентов], — я на них ссылаюсь; здесь начальство губернии, — я им свидетельствуюсь... Но в то самое время, как повсеместно видим мы благотворные заботы государя благочестивейшего и верных исполнителей священной его воли об искоренении тех пагубных лжеучений, которые, как поток подземный, устремлялись подрыть святые алтари Бога отцов наших; в то самое время, говорю, университет Казанский за златою оградой высочайше данных ему инструкций чужд повсеместной заразы, верен общей матери нашей, церкви православной, питает юность, пылающую живой верой, чистым медом ее небесного учения». [2]

Это отвратительное хвастовство зазнавшегося попечителя оказалось уже его лебединой песнью.

---

[1] Е. Феоктистов. Назв. соч., стр. 95—97.
[2] Там же, стр. 131—133.

Как жил, что делал Лобачевский в эти тяжкие годы? Поначалу разгром, учиненный Магницким, его не коснулся и, как это ни парадоксально, некоторые печальные результаты этого разгрома даже стимулировали его усиленную и успешную деятельность, притом не только научно-педагогическую, но и организационную, поскольку они заставили его уединиться, искать душевного успокоения в неустанной работе. Полностью отбросить и ликвидировать всю положительную культурно-творческую работу, которая велась в университете, не мог даже и Магницкий. Надо сказать, что глаз у Магницкого был несомненно зоркий; он быстро усмотрел, что преподавание математики в университете было поставлено лучше, чем по какому бы то ни было другому предмету. Он писал в своем докладе:

«В физико-математическом факультете часть математических наук заслуживает особенное внимание по выбору преподавателей. Можно сказать, что одна сия часть составлена правильно и преподается отлично хорошо. Университет обязан сим случаю: попечитель Румовский, будучи сам известный математик, занимался сим родом науки предпочтительно, и с тех пор люди, при нем выбранные и образованные, остались доныне»[1]. О научном значении каждого отдельного лица он, однако, часто высказывал довольно нелепые суждения. Вот что он, например, писал о Бартельсе. «Профессор Бартельс есть человек отлично знающий, но не довольно хорошо знает по-русски и лекции преподает вместе на русском, немецком и, иногда, смотря по разумению студентов, на латинском языке. Он вообще, кажется, лучше мог бы быть академиком, нежели преподавателем».[2] Это неверно: Бартельс был прекрасным преподавателем, но к роли академика совершенно не подходил.

В то время, когда производилась ревизия, Лобачевского в Казани не было; он находился в экспедиции вместе с Симоновым. Но мнение о молодом профессоре в Казани вполне упрочилось; на основании сведений, полученных из расспросов, Магницкий пишет: «Профессор Лобачевский по общему отзыву есть человек отлично знающий».

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. III, стр. 296.

[2] Там же, стр. 296—297.

В первом же предварительном докладе Магницкий писал: «...Лобачевский, Симонов и Срезневский, отличные способности которых не укроются от внимания начальства». Как было указано выше, Магницкий считал, что только пять профессоров университета вполне находятся на своих местах: Бартельс, Лобачевский и Симонов — трое из этих пяти.

И при всем том физико-математическая группа после деятельности Магницкого переживала кризис. Еще в середине 1816 г. умер Реннер; Броннер в 1817 г. уехал в отпуск на полгода; может быть, самый отъезд уже был вызван сведениями, которые ему сообщил Салтыков, — во всяком случае он уже в Казань не вернулся. Не вернулся из заграничного отпуска и Литтров. Бартельс получил приглашение в Дерпт на освободившуюся кафедру математики. Он был более всех других профессоров-иностранцев привязан к Казани, но, предвидя ту тяжелую обстановку, которая уже складывалась в Казанском университете, принял приглашение и осенью уехал в Дерпт. Если еще принять во внимание, что Симонов уехал на два года в кругосветное путешествие, то станет ясно, что на факультете, так недавно еще бывшем в цветущем состоянии, осталось очень мало преподавательских сил; так быстро сказывались результаты «целительной реформы» Магницкого.

Надо было все же наладить преподавание, а распределение преподавателей по всему университету устанавливал сам Магницкий из Петербурга. Уяснив себе, что Лобачевский владел глубоким разносторонним образованием, каким Никольский не обладал, Магницкий распорядился так: Лобачевскому предложил две кафедры — физики и астрономии, а Никольскому — математики. Таким образом Лобачевский на два года оставил преподавание математики и должен был преподавать две обширные дисциплины, которые к прямой его специальности не принадлежали. Он не отклонил этого предложения (впрочем, вряд ли вообще его можно было отклонить) и с большим увлечением занялся науками, которые он в школе Броннера и Литтрова хорошо усвоил. Насколько серьезно, с каким интересом Лобачевский относился к этому делу, можно судить по тому, что он подробно излагал свои лекции письменно и, не располагая другими пособиями для студентов, передавал им эти свои тетради. Впрочем Магниц-

кий этого не одобрил, так как «такая метода, только одним Лобачевским практикуемая», снижает самостоятельность студентов. Можно сомневаться, чтобы такой взгляд в условиях работы казанского студента был правилен. К сожалению, тетради эти до нас не дошли, сохранились только краткие записи Лобачевского при подготовке к лекциям.

При всем напряжении, которого требовала такая педагогическая работа, Лобачевский в течение всего этого периода нес большие и ответственные административные функции по университету. Он был единственным членом профессорской корпорации, которому доверяли не только товарищи, но вначале и попечитель; и его выдвигали всюду, где была нужна серьезная ответственная работа, где был нужен человек, на которого можно было бы вполне положиться. С отъездом Бартельса становится вакантной должность декана физико-математического факультета. На нее выбирают Лобачевского — Магницкий его в этой должности утверждает. Нужно было упорядочить библиотеку — руководство ею поручают Лобачевскому. Магницкий старается развернуть по университету значительное строительство — в строительный комитет вводится Лобачевский; позже, в качестве его председателя, Лобачевский осуществил огромное строительство университетских зданий. Среди профессоров, главным образом на физико-математическом факультете, возникает мысль об издании «Ученых записок» университета — Лобачевский намечается редактором журнала; осуществление этого начинания, впрочем, произошло значительно позже, когда Лобачевский был уже ректором университета. Нужно организовать при университете большой физический кабинет — организация этого дела поручается Лобачевскому. По возвращении Симонова из кругосветного плавания намечается устройство при университете настоящей астрономической обсерватории — Лобачевский привлекается к участию в этом деле. Устав университета предусматривает особый училищный комитет для наблюдения за деятельностью всех училищ округа и руководства ею — Лобачевский вводится в состав этого комитета. Лобачевский становится центральной фигурой Казанского университета. Это единственный человек, к которому с полным доверием и уважением относится вся университетская коллегия, которому в уважении, по крайней мере в начале своего управ-

ления университетом, не может отказать и Магницкий. В это мрачное время, когда, по выражению Лажечникова,[1] даже «от стен университета веяло холодом», напряженная работа, не оставляющая досуга, была единственным убежищем, в котором мог укрыться уважающий себя человек. И Лобачевский в эти годы отдает такой работе все свои силы и помыслы. Только исключительно одаренные натуры в расцвете своих физических и духовных сил могут проявить столько энергии, осуществить такую плодотворную деятельность.

Нужно сказать, однако, что не все поручения Магницкого Лобачевский принимал. 5 июля 1820 г. состоялся очередной годичный акт; представленный в связи с этим отчет вызвал целую бурю негодования со стороны попечителя, так как он недостаточно отвечал его взглядам. Выступавшие на акте профессора получили выговор в резкой форме, кроме профессора Городчанинова, речь которого представляла собой предел лицемерия и фарисейства. На следующий 1821 год, выступить на акте было предложено Лобачевскому, но он от этого категорически отказался; его примеру последовали и другие профессора. Это привело к первой размолвке между Магницким и Лобачевским, которая постепенно все углублялась. В 1823 г. Лобачевский был, повидимому не без указания Магницкого, выбран секретарем совета, но решительно отказался принять этот пост. Заседания совета представляли тягостную картину подхалимства и ханжества. Лобачевский не мог уклоняться от участия в этих заседаниях, не был в силах противостоять царившей в них атмосфере; но взять на себя обязанность регистрировать все, что на них происходило, нести ответственность за формулировки постановлений, до некоторой степени их утверждать, — этого он делать не мог и не хотел. Самое выборное собрание приняло бурный характер: Лобачевский был вспыльчив, вышел из себя. Магницкому об этом, конечно, не замедлили донести; Лобачевский был вынужден выслушать резкий выговор попечителя «за дерзкое поведение перед зерцалом». В попечительском делопроизводстве возникло даже целое дело «о неблагопристойностях и противностях», оказанных Лобачевским при избрании секретаря совета.

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. IV, стр. 86.

В связи с этим биографы Лобачевского иногда ставят вопрос — оказал ли Лобачевский активное противодействие тому произволу, который Магницкий безудержно проявлял как в своей административной деятельности, так и в обращении с профессорами. Вряд ли можно подходить к Лобачевскому с такими требованиями. Разнузданные реакционные силы, стоявшие за Магницким, являлись в ту пору слишком всемогущей стихией, и не было таких общественных кругов и лиц, на которые кто-либо на служебном посту мог в малейшей степени опереться в борьбе против нее. Но два случая особенно вменяются Лобачевскому в вину некоторыми авторами, как акты чрезмерного подчинения Магницкому.[1] Речь идет о некотором участии Лобачевского в двух процессах, один из которых был возбужден против петербургских профессоров, другой против профессора Солнцева в Казани.

Мы уже упоминали выше, что к числу наиболее реакционных фигур в министерстве кн. Голицына, на ряду с Магницким, принадлежал попечитель Петербургского округа Рунич. От Магницкого он отличался тем, что был гораздо ограниченнее его. В 1821 г. под несомненным влиянием Магницкого он обвинил профессоров Петербургского университета Раупаха, Галича, Германа и Арсеньева в том, что их лекции носят заведомо вредный характер, что они направлены против религии и предержащей власти. Возник процесс, который был в эту эпоху одним из самых грубых проявлений реакции в деле просвещения. Еще отвратительнее, чем самое обвинение, была форма, в которой процесс под председательством Рунича протекал в конференциях университета — без учета самых элементарных процессуальных норм, без предъявления подсудимым четко сформулированного обвинительного акта, без предоставления им возможности вести защиту. Процесс произвел в русском обществе, даже в самых умеренных его кругах, очень тяжелое впечатление.

В то время, когда процесс подготовлялся, Лобачевский и Симонов находились в Петербурге. Во время ревизии в Казани Магницкий с ними не виделся; теперь они представились попечителю, бывали у него, получили от него

[1] См. Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. IV, стр. 288, 376, 460; А. В. Васильев, Н. И. Лобачевский. СПб., 1914, стр. 43.

ряд поручений, в том числе предложение, к их прямым обязанностям не относившееся, — ознакомиться с тетрадями, по которым профессора, привлеченные к ответственности, читали лекции, и дать об этих лекциях заключение. Молодые ученые, конечно, могли бы от этой миссии отказаться, и это несомненно было бы более достойно их; но их, очевидно, пугала возможность рассориться со всемогущим попечителем при первом же знакомстве с ним; они приняли поручение, дали неблагоприятный для обвиняемых отзыв и тем предоставили Магницкому возможность утверждать, что он «вместе с Лобачевским и Симоновым» разоблачил петербургских профессоров. Самые отзывы не сохранились. Однако на процессе эти отзывы не фигурировали. Более того, ни у Сухомлинова, в книге которого помещен весьма подробный отчет о процессе, с приложением относящихся к нему материалов, ни в каком бы то ни было другом из многих его описаний не только не фигурирует докладная записка Лобачевского и Симонова, но даже не упоминаются их имена. Между тем Рунич так нуждался в обвинительном материале, что несомненно воспользовался бы заключением Лобачевского и Симонова, если бы оно было ему полезно. Очень вероятно поэтому, что отзыв содержал только неодобрительное суждение, не носившее «обличающего» характера; такое суждение могло быть и вполне искренним: в учении о так называемом «естественном праве» основное право человека признавалось ему врожденным; а эта точка зрения была Лобачевскому всегда чужда, нам придется в этом убедиться. Как «обличение» этот отзыв характеризуется только в заявлениях самого Магницкого, который был мастером искажать чужие мысли. Не имея этого отзыва на руках, очень рискованно вменять что-либо в большую вину Лобачевскому и Симонову.

Еще до того как процесс петербургских профессоров закончился (формально он тянулся долго и был прекращен высочайшим указом), Магницкий возбудил в Казани аналогичный процесс против профессора Г. И. Солнцева. Ему инкриминировалось содержание курса «естественного права», который он читал на факультете нравственно-политических наук. Эта доктрина, как известно, признавала, что человек от природы имеет ряд прав, которые ему принадлежат от рождения, которых его не может лишить никакая власть. Каковы эти права, какие выводы проистекают

из их признания, — эти вопросы различными приверженцами естественного права в большом диапазоне, от Фомы Аквинского до Канта, решались различно. Преподаватели этой дисциплины в русских университетах приспособляли ее к установкам правительства. Но достаточно сказать, что эта доктрина в XVII в. поддерживалась Спинозой, а в XVIII в. — Гольбахом и Ж.-Ж. Руссо, чтобы стало ясно, что ее преподавание в эпоху Магницкого было очень уязвимо. Оно и послужило ему средством для сведения счетов с неугодным профессором, для возмутительного обвинения, которое он возбудил против Солнцева.

Вначале Магницкий к Солнцеву благоволил; по его собственному выражению, Солнцев был его «правой рукой» при производстве ревизии университета. «Весьма вероятно, — замечает Загоскин, — что, оказывая содействие Магницкому, Солнцев еще и не подозревал тех прискорбных для университета последствий, к которым привели ревизия 1819 г. и назначение Магницкого попечителем». После смерти И. О. Брауна Солнцев состоял по избранию совета проректором (заместителем ректора); совет университета ходатайствовал о назначении, согласно уставу, выборов ректора. Однако Магницкий разрешения на это не дал и, вопреки уставу, самолично представил к утверждению в должности ректора Г. И. Солнцева. Это представление было утверждено. Однако симпатии Магницкого отнюдь не были прочными. При первой же слабой оппозиции со стороны Солнцева Магницкий дал ему почувствовать, что он этого не потерпит. После акта 1820 г. отношения обострились; при выборах должностных лиц в 1820 г. Солнцев просил совет не баллотировать его ни на одну из административных должностей.[1] Этот поступок Магницкий считал демонстрацией, он вызвал у него непримиримую вражду к Солнцеву и решение удалить его из университета. Зная, что в лице совета он имеет дело с послушным орудием своих замыслов, Магницкий решил сделать это так, чтобы устранить Солнцева постановлением самого совета. Солнцев был предан суду совета, собственно без четко выраженного обвинения, так как таковое предлагалось формулировать самому совету, но с многократным указанием на то, что деятельность Солнцева была противна религии («духу святому»), государству,

[1] Ректором был избран Г. Б. Никольский.

и, в частности, университету. Постановление совета пытается смягчить «вину» Солнцева.

«Общее собрание совета и правления признает г. Солнцева виновным. Сия виновность г. Солнцева, выводимая из разрушительности начал преподанного им естественного права, во мнении общего собрания умеряется прежними его заслугами и тем, что он, проходя многотрудную должность ректора, не имел довольно времени основательно вникнуть в хитросплетенную ложь тех начал естественного права, которые по большей части заимствовал из иностранных писателей».

Но суровый приговор все же гласил:

«А как он, г. Солнцев, разрушительными началами, несообразными с гражданским порядком и явно противными священному писанию, оскорбил духа святого господня, которым он знаменован и запечатлен в день избавления или крещения, и власть общественную, — то общее присутствие мнением полагает: удалить его навсегда от профессорского звания и впредь никогда ни в какие должности во всех учебных заведениях не определять». [1]

В ходе процесса советом была избрана комиссия, которой было поручено сличить тетради самого Солнцева, составленные в различное время, и записи студентов. Председателем комиссии был назначен Лобачевский, и к нему в качестве членов комиссии были прикомандированы три адъюнкта. Сомнительно, чтобы Лобачевский мог от этого поручения отказаться. Доклад комиссии устанавливал, что в различных тетрадях Солнцева расхождений нет, а между его тетрадями и записями студентов некоторое расхождение имеется. А. В. Васильев при всем своем благоговейном отношении к памяти Лобачевского находит, что «эти факты (т. е. участие Лобачевского в петербургском и казанском процессах) лежат темным пятном на светлой памяти великого геометра». Это осуждение — преувеличенное. Конечно, в Петербурге Лобачевским и Симоновым было проявлено некоторое малодушие, но и только. Учитывая опять-таки атмосферу, нависшую над казанской профессорской коллегией, надо отметить, что доклад о записях Солнцева был сформулирован осторожно, никакого неблагоприятного для обвиняемого впечатле-

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. III, стр. 537.

ния не произвел и на ходе процесса не отразился. По сравнению с гнусным усердием других членов совета, выступавших на этом процессе, поведение Лобачевского выделяется своей сдержанностью.

Есть основания предполагать, что если бы Магницкий еще долго оставался у власти, то самого Лобачевского в конце концов ожидали бы тяжелые испытания. Как ни странно, это явствует из одного эпизода, в котором Лобачевский, на наш взгляд, проявил себя хуже, чем в делах петербургских профессоров и Солнцева. Речь идет о вспышке Лобачевского, когда он в качестве распорядителя строительством подверг суровому и недостойному наказанию двух мастеровых. Лобачевский относился с чрезвычайным вниманием к каждой детали постройки. Провинившиеся мастеровые из озорства повредили орнаменты, украшавшие новую лестницу. Вспыльчивый Лобачевский вышел из себя и наложил физическое наказание, не соответствовавшее ни их вине, ни собственным его взглядам на человеческое достоинство. Он очень сожалел об этом инциденте.[1] Мастеровые были крепостными; из опасения, что этот инцидент может доставить университету неприятности, директор поспешил донести об этом попечителю. Прошло, однако, несколько дней — жалобы никто не подал. Теперь директор уже сожалел о своей поспешности и вдогонку написал попечителю новое письмо, в котором просил предать дело забвению. Очень характерен ответ Магницкого.

«Слову, которое Вы дали профессору Лобачевскому, я не могу изменить, не нарушив моего к Вам уважения и совершенной доверенности. Поэтому единственно я оставляю дело, о беспримерно дерзком его поступке зачатое, без последствия. Но я уверен, что Вы первый будете иметь причину раскаяться в Вашем снисхождении. Ежели профессор Лобачевский не очувствовался от моего с ним обращения после буйства, перед зерцалом сделанного [намек на возникшее в 1823 г. в попечительском делопроизводстве дело «о неблагопристойностях и противностях», оказанных Лобачевским при избрании секретаря совета], и многих нарушений должного почтения к начальству, одним невниманием моим к дурному его воспитанию покры-

[1] Н. П. Загоскин. Из прошлого Казанского университета, Исторический Вестник, т. IX, 1900.

тых; ежели неуместная и по истине смешная гордость его не дорожит и самой честью его звания, то чем надеетесь Вы вылечить сию болезнь душ слабых, когда единственное от нее лекарство — вера — отвергнуто?»

Нет уже следа прежнего благожелательного отношения Магницкого к Лобачевскому. Злопамятный попечитель не мог простить ему самостоятельности, которую он проявил при выборах секретаря совета. Очевидно всплывало старое обвинение в безбожии, которое в устах Магницкого имело угрожающий и зловещий характер; но, к счастью, его властвование уже приходило к концу.

Прошло семь лет правления Магницкого; надо отдать справедливость Лобачевскому, что, несмотря на тяжелую обстановку, он использовал эти годы с максимальной продуктивностью. Он вступил в этот период молодым, начинающим профессором; к концу его он уже был широко образованным, выдающимся преподавателем различных отраслей точного знания, облеченным доверием профессорской коллегии, администратором, имевшим уже опыт во всех отраслях жизни университета и просветительной работы.

Но более того, в эти годы уединения, когда неустанная работа мысли была убежищем от тяжких переживаний, Лобачевский написал свои первые научные труды и создал основы своего замечательного учения.

VII. Учебное руководство «Геометрия»

Вскоре после того как Магницкий привел Казанский университет в «надлежащее устройство», он предложил профессорам представить составленные ими учебные книги или даже конспекты для напечатания в качестве образцовых, «классических» по его выражению, руководств. Н. И. Лобачевский принадлежал к числу немногих, отозвавшихся на это предложение. Летом 1823 г. он представил написанный им курс геометрии; в сохранившемся делопроизводстве никакого ходатайства Лобачевского о напечатании этой книги нет; повидимому, он ее представил непосредственно ректору или директору университета. По уставу вопрос о разрешении печатать составленные преподавателем университета сочинения подлежал компетенции совета, но об этом в ту пору, конечно, не могло быть и речи. Директор университета, которым тогда со-

стоял Г. Б. Никольский, препроводил рукопись попечителю, испрашивая его разрешения напечатать ее на казенный счет. Магницкий направил рукопись на заключение академику Н. И. Фуссу, который дал о ней весьма неблагоприятный отзыв. В виду несомненного исторического интереса, который этот отзыв имеет, приводим его полностью.

«Милостивый государь мой Михаил Леонтьевич!

Сочинение, присланное мне при почтеннейшем отношении В. П. от 31 июля за № 912, под заглавием Геометрия, содержит в себе разные геометрические рассуждения и исследования, которые под сим или другим подобным названием, по надлежащем выправлении ошибочного и выпущении бесполезного или уже известного, могли бы быть представлены Вашему Превосходительству. Но сочинение сие не есть геометрия или полное и систематическое изложение всей науки, и если сочинитель думает, что оно может служить учебною книгою, то он сим показывает, что он не имеет точного понятия о потребностях учебной книги, т. е. о полноте геометрических истин, всю систему начального курса науки составляющих, о способе математическом, о необходимости точных и ясных определений всех понятий, о логическом порядке и методическом расположении предметов, о надлежащей постепенности геометрических истин, о неупустительной и, по возможности, чисто геометрической строгости их доказательств и пр. О всех сих необходимых качествах и следу нет в рассмотренной мною Геометрии, в которой, между прочим, и то странно, что сочинитель принимает французский метр за единицу при измерении прямых линий и сотую часть четверти круга, под именем градуса, за единицу при измерении дуг круга. Известно, что сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга; но сия новина нигде принята не была и в самой Франции давно уже оставлена по причине очевидных неудобств.

Впрочем, хотя сочинитель и назвал представленное В. П. сочинение Геометриею, но едва ли он сам думать может, что он написал учебную книгу сей науки. Главная цель его, по моему мнению, была та: чтоб объяснить некоторые предметы геометрического учения, кои по причине введенного в оные, для сокращения, понятия бесконечно-малого, казались ему темными. Но, при старании избежать употребления сего понятия, случилось ему то самое, что и другим при подобном намерении случается. Бесконечно-малое явно находится и в его геометрии, но под другим именем и видом, ибо он из общих формул, посредством способа его найденных, для получения истинных и во всех учебных книгах доказанных выражений, бросает члены лишние по тому самому, что они, как он говорит, — меньше всякого числа, т. е. бесконечно-малы; а если б не были бесконечно-малы, то как же мог бы он выпускать сии члены без непростительной погрешности.

При изъясненных мною недостатках сей Геометрии и при значительном количестве полных и к употреблению, хотя и не все равно-

мерно, гораздо более годных курсов геометрии на русском языке (из коих я упоминаю только о подлинных: Румовского, Осиповского, Гамален и Гурьева, и о переводных: с греческого — Евклидовых начал, Суворова и Никитина и Петрушевского, с французского — Безу, Лежандра, Лакроа и пр.), само собою разумеется, что сия Геометрия, как учебная книга, нигде принята быть не может и что оную к напечатанию на казенный счет я рекомендовать никак не могу.

Честь имею и пр.»

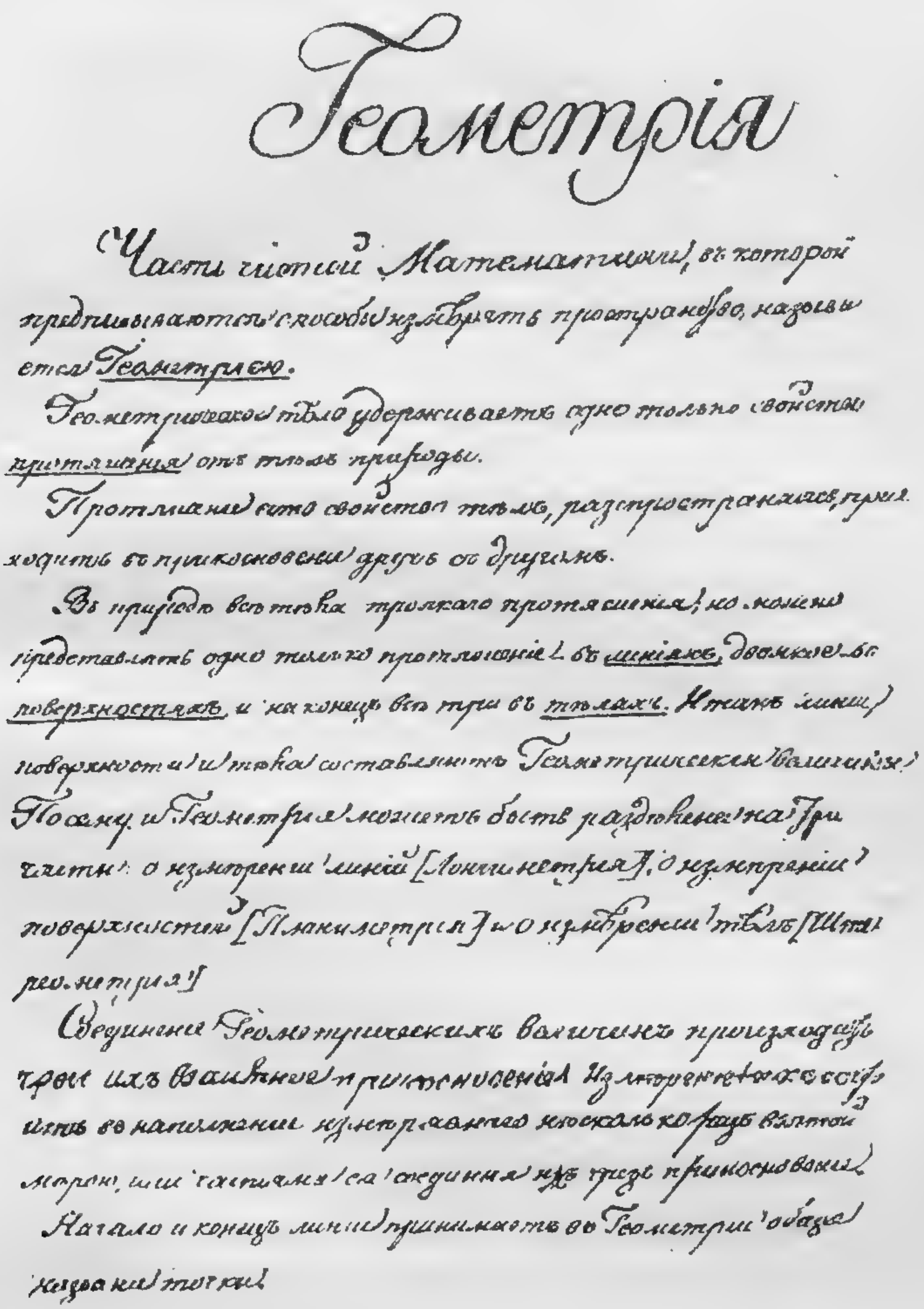
В силу этого сурового отзыва Н. И. Лобачевскому было объявлено через директора университета, что «сколько бы он, попечитель, ни желал ободрить ученые труды гг. профессоров Казанского университета», но, к сожалению, по изложенным в мнении г. Фусса недостаткам в сочинении Н. И. Лобачевского, не может приступить к изданию его труда и «потому желал бы я, — добавляет Магницкий, — чтобы г. Лобачевский или исправил помянутое сочинение, или подал на замечания г. Фусса изъяснение». Однако обиженный этим Н. И. Лобачевский не пожелал сделать ни того, ни другого, даже не взял своего труда обратно, и подлинная рукопись его «Геометрии» считалась утраченной до начала 1898 г., когда Н. П. Загоскину посчастливилось открыть ее среди старых дел архива попечительской канцелярии.

Отказ Лобачевскому в напечатании его книги произвел немалое впечатление на членов профессорской коллегии. Это был первый тяжелый удар, нанесенный Лобачевскому в его научной работе; он обострил отношения между Лобачевским и Магницким. Сослуживцы Лобачевского не могли допустить, чтобы он написал учебное руководство, заслуживающее такого решительного осуждения; тем большее недоумение это вызывает в наше время, когда авторитет Лобачевского стоит так высоко. В этом инциденте необходимо разобраться, нужно выяснить его источник и оценить его sine ira ac studio. Как видно из делопроизводства, сохранившегося в архиве попечителя округа, Магницкий посылал на отзыв все рукописи, поступавшие к нему для напечатания на казенный счет. Он жил в Петербурге, и направление рукописи на отзыв такому авторитетному рецензенту, как академик Фусс, было вполне естественным. Несколько слов об этом ученом.

Н. И. Фусс (1755—1826) еще молодым был вызван в Россию из Швейцарии Эйлером. При недюжинных дарованиях и в постоянной работе под руководством Эйлера Фусс очень скоро опубликовал работы, обратившие на

Н. И. Лобачевский

Портрет 20-х годов XIX века, работы В. Л. Щеголькова



Геометрія

Часть чистой Математики, въ которой предписываются способы измѣрять пространство, называется Геометріею.

Геометрическое тѣло удерживаетъ одно только свойство протяженія отъ тѣлъ природы.

Протяженіе есть свойство тѣлъ, распространяясь, приходить въ прикосновеніе другъ съ другомъ.

Въ природѣ всѣ тѣла тройнаго протяженія; но можно представлять одно только протяженіе въ линіяхъ, двойное въ поверхностяхъ, и наконецъ всѣ три въ тѣлахъ. Итакъ линіи, поверхности и тѣла составляютъ Геометрическія величины. Посему и Геометрія можетъ быть раздѣлена на три части: о измѣреніи линій [Лонгиметрія], о измѣреніи поверхностей [Планиметрія] и о измѣреніи тѣлъ [Стереометрія].

Соединеніе Геометрическихъ величинъ производится чрезъ ихъ взаимное прикосновеніе. Измѣреніе ихъ состоитъ въ наложеніи измѣряемаго нѣсколько разъ взятой мѣры, или частями ея соединенныя чрезъ прикосновеніе.

Начало и конецъ линіи принимаютъ въ Геометріи обозначаемыми точками.

Факсимиле из рукописи Н. И. Лобачевского «Геометрия». Первая страница.

себя внимание в Европе. Первые из этих работ относились главным образом к практической астрономии. В дальнейшем математические интересы Фусса настолько углубились, что трудно даже указать область анализа того времени, в которой Фусс не имел бы более или менее значительных работ. С 1783 г. Фусс состоял ординарным академиком и профессором Петербургского университета; он был также членом германской, шведской и датской академий; с 1788 г. и до конца жизни он состоял непременным секретарем Академии. Фусс принимал активное участие в делах министерства народного просвещения. К числу оголтелых реакционеров того времени, к группе Голицына, он не принадлежал. Напротив, вот что он писал: [1] «Кровью обливается мое сердце, когда я сравниваю настоящее положение наших высших учебных заведений с теми ожиданиями, которые питал тринадцать лет назад, под влиянием свежей жизненной струи, изливавшейся во все сферы русского просветительного дела». Что же побудило Фусса дать о работе Лобачевского такой резкий отзыв? Некоторую роль явно играл политический момент: как мы видим из отзыва, Фусса возмутило, что Лобачевский в своем учебнике вводит метр в качестве единицы меры длины и центезимальное деление угла. Это, конечно, указывает на прогрессивное направление Лобачевского, и Фуссу его оппозиция отнюдь не делает чести. Академику Фуссу надлежало бы знать, что идея центезимального деления угла возникла гораздо раньше французской революции, и притом не во Франции; даже первое ее осуществление имело место не во Франции, а в Германии и Англии; ему следовало бы знать, что во Франции предложение о создании единой десятичной системы мер и весов исходило от самых выдающихся математиков и физиков. Эти строки отзыва производят, конечно, очень тяжелое впечатление; но все же нельзя думать, что этот политический момент сыграл решающую роль при осуждении «Геометрии». В этот отзыв необходимо вчитаться внимательнее: он отнюдь не похож, например, на тот грубый пасквиль анонимного автора, который был помещен в «Сыне отечества» по поводу сочинения «О началах геометрии» (см. ниже стр. 185).

---

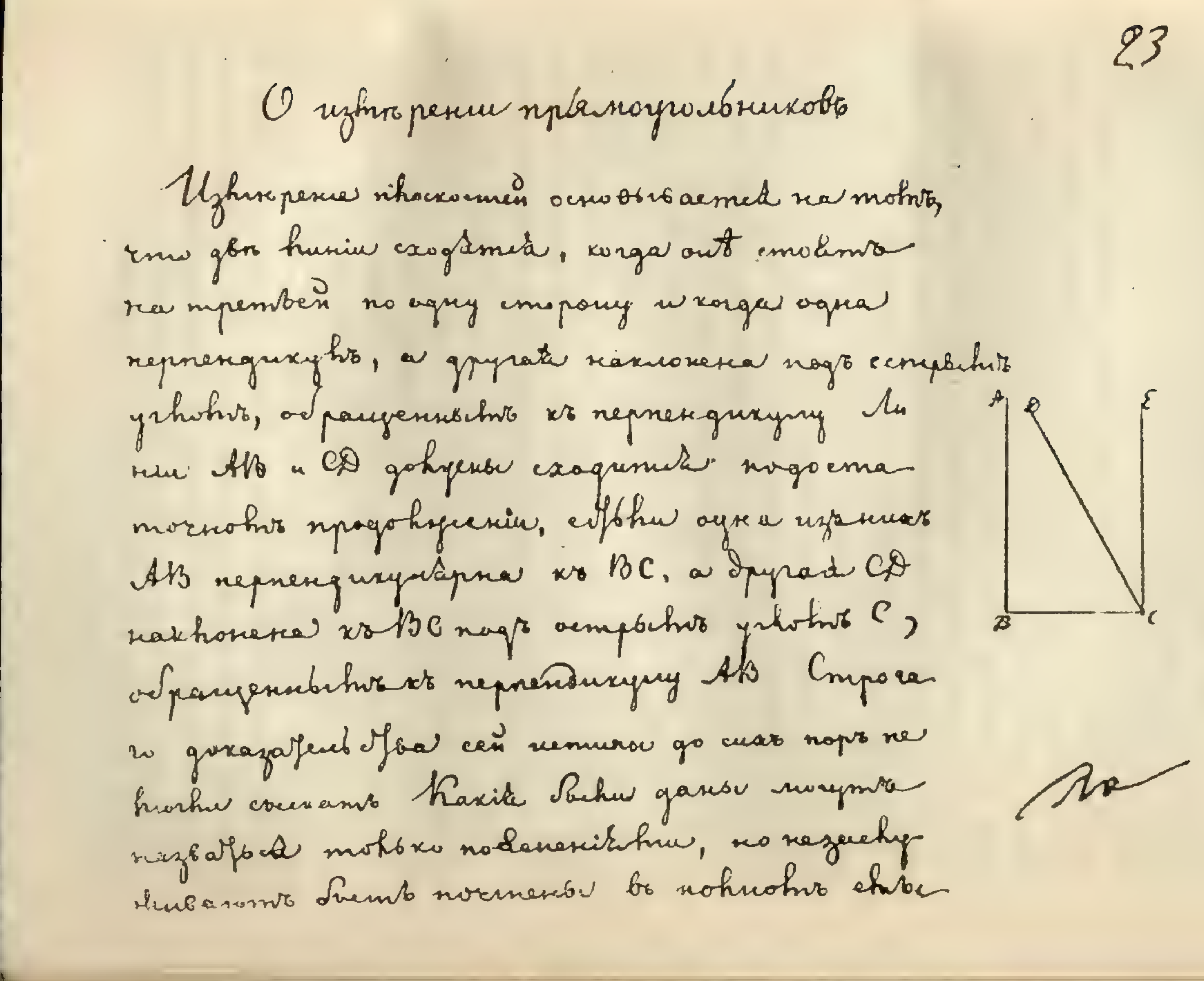
[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. III, стр. 258.

Как видно из письма Магницкого к Фуссу, он скрыл от последнего, что «Геометрия» принадлежала профессору Казанского университета Лобачевскому. Из воспроизведенного письма Магницкого Фусс должен был скорее заключить, что книгу составил рядовой «наставник» Казанского округа. При всем том Фусс начинает свой отзыв словами «Сочинение... содержит в себе разные геометрические рассуждения и исследования, которые... по надлежащем выправлении ошибочного и выпущении бесполезного или уже известного, могли бы быть представлены Вашему Превосходительству». Речь идет о книге по элементарной геометрии, которая на новый фактический материал не претендует и такового не содержит. То, что «уже известно», могло бы, таким образом, относиться только к методологической стороне дела. Приведенные строки обнаруживают, что Фусс, даже не зная того, что книга написана не рядовым преподавателем, а, «по общему признанию» того времени, просвещенным и талантливым молодым ученым, все же усмотрел в ней новые методологические рассуждения, заслуживающие опубликования. Его математическое чутье подсказало ему, что в ней есть мысли, имеющие право на внимание. Правда, он требует исправления ошибочного. Голословность этого указания не дает возможности усмотреть, что̀ именно Фусс считал ошибочным.

Но нужно признать, что книга составлена не так тщательно, чтобы это требование можно было считать совершенно лишенным основания. Попадаются промахи, подчас довольно досадные; иногда эти промахи могут быть действительно квалифицированы как ошибки. Именно грешит в этом отношении глава IX «Об измерении призм». Условия равенства призм выражены неправильно — они не исключают симметрию; это привело к прямо ошибочному утверждению, что всякий параллелепипед разбивается диагональной плоскостью на «одинаковые» (т. е. конгруэнтные) треугольные призмы. Эта ошибка ведет свое начало еще от Евклида и имеет свою историю, но Лежандром и Лакруа она была исправлена; Лобачевскому следовало бы отнестись к этому внимательнее. Нужно признать, что достаточно тщательной обработкой книга вообще не отличается. Более чем вероятно, что Лобачевский выправил бы эти погрешности, если бы дело действительно дошло до печатания книги.

Возвращаемся к отзыву Фусса. «Но сочинение сие, — пишет он, — не есть геометрия или полное и систематическое изложение сей науки». В этом отношении Фусс безусловно прав: «Геометрия» не представляет собой полного, систематически построенного учебного курса геометрии. Это есть обзор геометрии, предназначенный для тех, кто курс элементарной геометрии уже усвоил, а не учебник геометрии. Конечно, Лобачевскому следовало бы это отчетливо сказать в предисловии, и, может быть, такое предисловие и было бы книге предпослано, если бы дело дошло до ее печатания. Однако Фусс имел перед собой запрос, надлежит ли «Геометрию» печатать на казенный счет как учебную книгу. «Если сочинитель думает, — отвечает Фусс, — что оно может служить учебной книгой, то он сим доказывает, что он не имеет точного понятия о потребностях учебной книги, т. е. о полноте геометрических истин, всю систему начального курса науки составляющих». Сказано резко, но по существу Фусс прав; автор, который смотрел бы на эту книгу как на полный учебный курс начальной геометрии, действительно этим обнаруживал бы, что он не имеет представления о том, как должен быть такой элементарный курс составлен. Но Лобачевский так на свою книгу, несомненно, не смотрел; он далек от того, чтобы охватить «всю полноту геометрических истин»; напротив, он дает обзор только наиболее важного, существенно принципиального и избегает подробностей, которые ничего идейно-важного не содержат, «которые должны быть слушателям давно известны». Фусс просмотрел эту характерную фразу, которая в значительной мере сводит всю его отповедь на-нет. Фусс упрекает автора в том, что он не имеет «точного понятия... о необходимости точных и ясных определений всех понятий..., о неупустительной и, по возможности, чисто геометрической строгости доказательств» и пр. В этом он безусловно неправ; если оставить в стороне некоторые промахи, то в этом отношении молодой геометр был впереди старого ученого, находившегося во власти изжитых традиций. К этому мы вернемся ниже.

Фусс чувствует, что он имеет здесь дело не с рядовым составителем учебника, и ставит себе вопрос: какова же внутренняя основная цель, которую имел в виду автор, перестраивая систему геометрии? Она кроется, по его мнению, в том, что автор хотел избегнуть введения бесконечно



23

О измѣреніи прямоугольниковъ

Измѣреніе плоскостей основывается на томъ,
что двѣ линіи сходятся, когда онѣ стоятъ
на третьей по одну сторону и когда одна
перпендикулъ, а другая наклонена подъ острымъ
угломъ, обращеннымъ къ перпендикулу. Ли-
ніи АВ и CD доказаны сходиться подоста-
точномъ продолженіи, если одна изъ нихъ
АВ перпендикулярна къ ВС, а другая CD
наклонена къ ВС подъ острымъ угломъ С,
обращеннымъ къ перпендикулу АВ. Строга-
го доказательства сей истины до сихъ поръ не
могли сыскать. Какія были даны могутъ
назваться только поясненіями, но не заслу-
живаютъ быть почтены въ полномъ смы-

Факсимиле из рукописи Н. И. Лобачевского «Геометрия», 23-я страница, относящаяся к учению о параллельных линиях

малых, — и это ему не удалось. Это совершенно не соответствует действительности: ни в «Геометрии», ни в дальнейших своих работах Лобачевский не избегает бесконечно малых; напротив, он пользуется приемами, которые составляют существенную часть анализа бесконечно малых; и хотя самого термина этого он в «Геометрии» не употребляет, но он систематически применяет методы интегрального исчисления в элементарном, но чистом виде. Он всюду говорит о пределе, «границе», которую он разыскивает с полной точностью.

Фусс, несомненно, видел, что книга написана незаурядным автором. Но он не знал, он не ощутил, может быть, и не мог еще почувствовать, что автор — геометр первого ранга, что он имеет право и возможность подойти критически к традиционной системе Евклида и искать при изложении начал геометрии других путей, что его установки заслуживают большего внимания, чем это может с первого взгляда показаться.

В предисловии к первому печатному изданию «Геометрии» [1] проф. А. В. Васильев высказывает мысль, что позже, когда Лобачевский был ректором Казанского университета и пользовался значительным влиянием, он мог бы «Геометрию» напечатать и «если не сделал этого, то, вероятно, потому, что сознавал сам в этом отношении ее недостатки». Мы считаем, что это далеко не так. Несущественные промахи было бы, конечно, очень легко исправить; но мысль Лобачевского продолжала усиленно работать над вопросами обоснования геометрии, и в ближайшие же годы он ушел в этом направлении далеко вперед. Уже в 1826 г. некоторые идеи, содержавшиеся в «Геометрии», были для него пройденным этапом.

«Геометрия» Лобачевского представляет собою краткий обзор элементарной геометрии, несомненно составленной для читателей, уже усвоивших основной курс геометрии, в первую очередь для студентов, которым Лобачевский неоднократно читал курс геометрии. В главе VII, заканчивая изложение учения об измерении треугольников, как мы это уже отметили, Лобачевский замечает: «Все это должно быть моим слушателям давно известно, почему и оставляю дальнейшие подробности». Но «Геометрия» — во всяком случае учебная книга, и поэтому, чтобы дать, по

[1] Н. И. Лобачевский. Геометрия. Казань, 1909.

возможности, отчетливое представление о том месте, которое она могла бы занять в учебной литературе, о том ее назначении, которое имел в виду автор, о ее достоинствах и недостатках, необходимо прежде всего сделать краткий обзор учебной литературы того времени, как иностранной, так и русской; необходимо дать представление о той научно-педагогической обстановке, в которой эта книга составлялась. Необходимо выяснить, под влиянием каких авторов, каких сочинений книга Лобачевского была составлена.

VIII. Евклид, Даламбер, Лежандр и русские авторы учебников по геометрии

В XVIII в. в качестве серьезной учебной книги по геометрии еще безраздельно царили «Начала» Евклида. В школе и вне ее, всюду, где преподавание геометрии выходило за пределы самых первых начатков этой науки, оно производилось по Евклиду. Это преобладающее значение Евклида в некоторых странах сохранилось и в ту пору, когда Лобачевский учился, и даже, когда он уже преподавал в Казанском университете. В Англии и в Италии это неизменное тяготение к Евклиду, как к учебной книге для средней школы, настойчиво продолжалось еще до последней четверти прошлого века. Основной причиной этого были, конечно, неоспоримо высокие достоинства творения Евклида. Еще Кардан дал следующее выражение своему восхищению «Началами» Евклида: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение, по справедливости, нельзя с ними сравнить. Вследствие этого в них отражается такой свет истины, что, повидимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

Здесь неуместно, конечно, входить в общую оценку «Начал» Евклида, высокие достоинства которых, как уже сказано, неоспоримы; к тому же ниже нам еще придется этим сочинением заниматься. Но сам Евклид, повидимому, не смотрел на свои «Начала» как на подлинно учебную книгу, особенно для начинающих; и немного найдется в настоящее время людей, которые были бы склонны защищать учебное значение Евклида. Если при всем том в интересующую нас эпоху «Начала» еще сохранили первен-

ствующее место в учебной литературе, то это объяснялось главным образом двумя причинами.

Во-первых, среднее образование со значительным курсом геометрии было доступно только господствовавшим классам, которые издавна культивировали классическое образование. «Начала» Евклида представляли собою одно из величайших произведений античной литературы. Восхищение, с которым относились к этой замечательной книге в средние века, получило выражение в приведенной цитате из книги Кардана; оно сохраняло всю свою силу в XVIII в. и в первой четверти XIX в. Сопоставление «Начал» с библией было обычно в педагогической литературе и придавало «Началам» облик неоспоримого авторитета. «Никогда ни одно научное сочинение, — писал уже в начале XIX в. Боссю, — не имело успеха, сравнимого с «Началами» Евклида. Исключительно по ним в течение веков учили геометрии во всех математических школах; они переведены на все языки и на всех языках комментировались, — доказательство их исключительного превосходства». [1]

Со всем характером классического образования находится в полной связи и вторая причина господства Евклида как учебной книги. Она коренилась в самых задачах, которые связывались с преподаванием геометрии. Основную цель этого преподавания видели не в том, чтобы сообщать учащимся фактические сведения о пространственных образах и соотношениях или развивать в них пространственные представления. Главную роль геометрии в общей школе усматривали в том, чтобы при ее посредстве развивать и укреплять формальную дисциплину ума. Еще только пятьдесят лет назад известный германский педагог Шрадер писал: «Задача заключается не в том, чтобы учить математике, а в том, чтобы при посредстве математики дисциплинировать ум». Естественно, что этой цели формально выдержанная система Евклида, даже при всех ее изъянах, раскрытых комментаторами, могла служить лучше, чем какая бы то ни было другая книга.

Когда во второй половине XVIII в., с повышением роли буржуазии в социально-экономической жизни, при назревавших во Франции революционных настроениях, тяготе-

---

[1] Ch. B o s s u t. Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris, 1802, I, стр. 45.

ние к образованию стало охватывать новые, более широкие слои населения, понадобилась и более доступная учебная книга. В виде переходной ступени это сказалось прежде всего в появлении так называемых школьных изданий «Начал» Евклида. Такие школьные издания отличались тремя особенностями.

Во-первых, это были переводы Евклида на родной язык учащихся; этот отказ от «классического» — греческого или, в лучшем случае, латинского — текста представлял уже существенный шаг вперед, делавший «Начала» гораздо более доступными.

Второй особенностью школьных изданий Евклида являлось то, что они почти все содержали только восемь книг из тринадцати: первые шесть книг планиметрических, одиннадцатую и двенадцатую стереометрические; арифметические книги (VII—IX), трудные X и XIII книги вовсе опускались; сохранялось то, что было строго необходимо при обучении геометрии.

Третью особенность составлял характер примечаний и дополнений, которыми обычно сопровождались «Начала». В них критика отходила на задний план; вместо традиционных «схолий» появляются примечания и дополнения, имеющие целью пояснить текст, сделать его более доступным даже учащемуся. Авторы иногда обрабатывают в этом смысле самый текст Евклида. Некоторые школьные обработки «Начал» выдержали очень большое число изданий. Так, например, английский перевод Симсона (R. Simson), выпущенный в 1756 г., выдержал около 30 изданий, английская же обработка Плейфера (J. Playfair), выпущенная в 1797 г., выдержала 10 изданий. Плейфер ввел буквенные обозначения для длин отрезков и этим значительно модернизировал некоторые разделы этого сочинения, особенно теорию пропорций. В Германии была широко распространена обработка Лоренца (J. F. Lorenz), первое издание которой вышло в 1761 г. Лоренц еще значительно больше модернизировал «Начала». Внесенные им поправки, правда, существенно не меняли текста Евклида; но и они, несомненно, этот текст оживили, сделали «Начала», как тогда считали, учебной книгой.

Во Франции школьные издания Евклида появились значительно раньше. Уже в 1672 г. Дешаль (C. F. Déchales) выпустил французский перевод «Начал» с существенной переработкой, имевшей целью сделать это сочинение зна-

чительно более доступным. Хотя этот перевод, по замечанию Лагранжа и Даламбера, сохранил, в сущности, только последовательность теорем Евклида и не мог быть признан удачным, он несколько раз переиздавался и даже в этой своей модификации «Начал» был издан на итальянском и английском языках. Это свидетельствует о том, как велика была потребность в более доступном учебнике геометрии, нежели подлинные «Начала» Евклида.

Но в тот период, который нас интересует, таких изданий во Франции не было. Правда, в 1804 г. Пэйрар выпустил в свет французский перевод восьми книг[1] (как и в других учебных изданиях — I-VI, XI, XII), но не в том стиле, в каком в Англии и в Германии выпускались издания Симсона, Плейфера и Лоренца; это был дословный перевод, очень тщательно выполненный, послуживший основой для полного академического издания Евклида на трех языках (греческом, латинском и французском), который и в настоящее время считается одним из лучших.

Мы здесь касались только педагогического значения Евклида. О его научных установках нам придется подробно говорить ниже.

С середины XVIII в. во Франции нарастали настроения, знаменовавшие глубокий переворот во взглядах на все общественные отношения в стране; подготовлялась революция. В области народного образования все настойчивей становились требования большого его расширения и придания ему более живого и конкретного характера. Это, естественно, не могло не отразиться и на взглядах на преподавание математики. Как известно, новая идеология того времени в большой мере получила свое выражение в идеях «энциклопедистов». «Энциклопедия» Дидро и Даламбера[2] стала выходить в 1751 г. Математическим ее разделом руководил Даламбер в сотрудничестве с Боссю. В 1757 г. появился VII том «Энциклопедии», в котором нашла себе место статья Даламбера «Геометрия». Часть этой статьи была посвящена вопросу о том, как надлежит составлять начала геометрии. Речь идет о том, как надле-

[1] H. F. Peyrard. Les éléments de géométrie d'Euclide traduits litteralement. Paris, 1804.

[2] «Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences des arts et des metiers». Mis en ordre par Diderot et par d'Alambert. Paris, 1751—1780.

жит излагать в учебных целях начала науки вообще, геометрии в частности. Читатель, знакомящийся с этой статьей в настоящее время, легко может получить впечатление, что многие утверждения автора тривиальны. Это только означает, что идеи Даламбера в общем получили такое признание и такое распространение, что сейчас представляются общепризнанными. Не так обстояло дело почти 200 лет назад, когда статья Даламбера была опубликована. Отчетливо высказанные идеи Даламбера были не только новыми, но в известном смысле даже революционными. Как известно, «Энциклопедия» получила широкое распространение, внимательно читалась даже противниками новых течений; на математические круги педагогов статья Даламбера имела огромное влияние. Она с большим интересом читается и в настоящее время.

Даламбер относится к Евклиду крайне, быть может даже чересчур, сдержанно; он посвящает ему только следующие строки в начале статьи. «Евклид, живший приблизительно на 50 лет позже Платона, собрал то, что его предшественники открыли в области начал геометрии; он составил дошедшее до нас произведение, которое многие из современных геометров считают лучшим из сочинений этого рода». Даламбер, однако, не считает, что начала геометрии должны и в настоящее время составляться по плану и методу Евклида. Он вообще не считает полезным следовать в учебной книге традициям, освященным веками, или излагать все перипетии исторического генезиса руководящих идей; необходимо только сохранить «внутреннюю концепцию понятий».

Изложение начал геометрии по плану Даламбера должно быть прежде всего сообразовано с тем, для какой цели книга предназначается — для начального ли обучения, имеющего узко практические цели, для более серьезного изучения геометрии или для подготовки людей, которые имеют склонность и способности к специальным занятиям этой наукой; каждой из этих трех основных задач должна соответствовать учебная книга особого типа.

С этим должна быть сообразована и степень точности построения системы геометрии; во всяком случае нужно избегать той «химерической» точности, которая, оставаясь сомнительной в научном отношении, в учебной книге несомненно вредна и часто даже переходит в софистику. В соответствии с этим Даламбер считает, что начала гео-

метрии не следует начинать с аксиом, так как построение учебной книги на предпосланных аксиомах есть претензия именно на такого рода химерическую точность. Хорошо известно, что построение геометрии в «Началах» Евклида далеко не носило строго логического характера.[1] Наглядные представления, указания глаза сопутствуют в этом сочинении логическим рассуждениям на всем его протяжении; рассматривать «Начала» как систему выводов из предпосланных определений и аксиом ни в каком случае невозможно. В эпоху Даламбера попытки построения геометрии на выдержанной аксиоматике даже в целях научного изложения предмета, несомненно носили еще «химерический» характер в том отношении, что логическая строгость, которую хотели в это дело внести, была кажущейся и при сколько-нибудь внимательном анализе оказывалась иллюзорной, не выдерживающей критики. «Какая польза в том, — замечает Лакруа, — чтобы нагромождать аксиомы в начале книги, ... когда мы все равно не можем воспользоваться ими при доказательствах». Попытки строить учебную книгу по элементарной геометрии на основе выдержанной аксиоматики несомненно обречены еще на неудачу, даже в настоящее время. Но от точности фактической и притом доступной учащемуся при серьезном изложении геометрии, по взглядам Даламбера, ни в коем случае не следует отказываться. Более того, вот как эти мысли формулирует Даламбер в своей статье. «Спрашивается, какому из двух качеств следует отдать предпочтение при составлении начал: доступности или строгой точности? Очевидно, что самый вопрос содержит неправильное предположение; он предполагает, что строгая точность может быть лишена доступности; но имеет место противоположное: чем строже дедукция, тем доступнее она для восприятия, ибо точность заключается в сведении всего к наиболее простым принципам. Отсюда следует также, что строгость в собственном смысле этого слова необходимо влечет за собою наиболее естественный и наиболее прямой метод». Итак точность, отчетливая и доступная, чуждая всякой метафизики и схоластики, часто скрывающейся в нагромождении аксиом, — таково основное требование, которое Даламбер предъявляет к составителям «Начал». И в этом смысле дедукция заключается не в выводе всей

[1] См. главу XI, стр. 120.

системы из небольшого числа аксиом и определений (по отношению к которым Даламбер тоже рекомендует большую осторожность), а в сведении сложных истин к простым, доступным и очевидным, сколько бы их ни было, без попытки дать полный их перечень. Конечно, указать границы, где кончается «химерическая» и где начинается «действительная» точность, не так просто, да и вряд ли вообще возможно; но по существу точка зрения Даламбера ясна; с тенденциями Евклида и его комментаторов она глубоко расходилась.

Далее, опять в противоположность Евклиду, в началах, по мнению Даламбера, преобладающее значение должна иметь метрическая геометрия. Сообразно этому, учебную книгу по геометрии следует делить не на учение о прямой, о плоскости, о пространстве (т. е. на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию, как эти термины понимаются в настоящее время), а на три отдела, посвященные соответственно *измерению* длин, площадей и объемов. Даламбер дает подробные указания, как следует строить учение об измерении. Все учение об измерении основано на пропорциональности одних величин другим; Даламбер дает подробные указания, какого рода пропорциональности должны быть устанавливаемы. Эти указания в такой мере выполняются современными учебниками, что вряд ли нужно на этом останавливаться; достаточно будет сказать, что вся эта схема идет от Даламбера.

Евклид, как известно, очень осторожно пользуется движением; он непосредственно к нему прибегает только два раза. Даламбер рекомендует пользоваться движением систематически, выясняя, однако, что речь идет здесь не о «грубом механическом движении», а о геометрическом выяснении того, какие точки, линии и фигуры могут друг друга покрыть. Эта точка зрения очень близка к идеям «Эрлангенской программы» Клейна.

Что касается самого установления пропорциональности, то узловым пунктом здесь является случай несоизмеримых отношений. Даламбер считает, что равенство несоизмеримых отношений должно устанавливать доказательством от противного; он решительно отклоняет совершенную, но очень сложную Евклидову теорию пропорций. В этом есть, конечно, логический дефект, но вряд ли его можно избегнуть в преподавании начинающим.

Наконец, в учении об измерении длины окружности,

площади круга, объема пирамиды, поверхности круглых тел нельзя обойтись без учения о бесконечно малых; по существу, конечно, они содержатся уже в теории несоизмеримых отношений. Нельзя сказать, чтобы статья Даламбера содержала достаточно точные указания того, как, по его мнению, следует строить учение о бесконечно малых. Он во всяком случае считает необходимым ввести понятие о пределе и основных его свойствах, но допускает и применение метода исчерпывания в различных его формах; он предлагает, таким образом, пути, Евклиду совершенно чуждые.

В этом свободном изложении статьи Даламбера мы далеко не исчерпали идей, в ней содержащихся; в ряде дополнений в других статьях, ссылками на которые она пестрит, эти идеи получают значительное развитие. Быть может, далеко не все, что Даламбер предлагает, действительно должно быть проведено в учебной книге по геометрии; многое в настоящее время перекристаллизовалось, многое отпало. Но существенно то, что во всем комплексе статей по геометрии, помещенных в «Энциклопедии», Даламбер дал самостоятельно разработанный план построения начал геометрии, как учебной книги, который почти во всех основных своих частях глубоко отличается от системы Евклида; он был проникнут новизной, стремлением отбросить старый шаблон, исканием в деле преподавания новых путей.

Статьи Даламбера получили широкое распространение во Франции и вне ее; с ними не только считались при составлении новых «Начал» геометрии, но часто основывали на них построение новой книги. Три сочинения, относящиеся к концу XVIII и началу XIX в., получили при этом преобладающее значение: «Курс» Безу, «Начала» Лежандра и «Начала» Лакруа. Эти сочинения в различной степени выдерживают план Даламбера; они имеют различное назначение и разную структуру, но все три руководства отражают тенденцию Даламбера оторвать преподавание геометрии от традиционной, тяжелой схемы Евклида; все три книги написаны выдающимися математиками и талантливым педагогами; они не снизили уровня преподавания геометрии, сделав ее гораздо более доступной. Эти три учебника геометрии получили чрезвычайно широкое распространение во всех культурных странах и знаменуют новую эпоху в деле преподавания геометрии. И это не случайно:

три книги эти — именно те три типа учебной книги, которые предусматривает Даламбер.

Наиболее существенным было то, что все три книги были составлены очень талантливо. Они получили широкое распространение во всей Европе, выдержали огромное число изданий; ни в каком случае не будет преувеличением сказать, что все последующие учебные книги по геометрии в XIX в. копируют Безу, Лежандра и Лакруа, смотря по своему назначению, или заимствуют отдельные части то у одного, то у другого автора.

Книга Безу особенно элементарна, — напротив, книга Лакруа — учебник повышенного типа. Для среднего образования, несомненно, наибольшее значение приобрели «Начала геометрии» Лежандра. Они собственно сохранили общий остов «Начал» Евклида и его выдержанное синтетическое изложение. Английский геометр де-Морган (De Morgan) имел все основания смотреть на новые «Начала» как на переработку книги Евклида. Но это была очень глубокая переработка.

Прежде всего Лежандр изменил самый стиль «Начал»; он заменил формально-эпический язык греческого геометра живым французским изложением. Он опустил все, что не укладывается в рамки преподавания геометрии юношам, а не философам; он превратил «Начала» в курс элементарной геометрии. Он ввел элементы алгебры, и вторая книга Евклида отпала, так как в ней уже не было нужды; она могла только иллюстрировать общие алгебраические соотношения. Евклид, не владея понятием об иррациональном числе, не рассматривает отношение двух отрезков как число; он вынужден поэтому излагать сложную теорию пропорций (по существу принадлежавшую Евдоксу) и посвящает этому всю пятую книгу «Начал». Лежандр арифметизировал учение об отношениях и пропорциях, и отпала трудная пятая книга. Извлечение квадратного корня, введение радикалов освобождает геометрию от совершенно недоступной десятой книги. В теории пропорций, на которой Лежандр строит учение об измерении по плану Даламбера, он всегда обрабатывает случай несоизмеримых отношений общим приемом приведения к абсурду; евклидова теория пропорций становится ненужной. Тем же методом доказательства от противного он излагает и теорию пределов — прием, составляющий уже слабую сторону книги. Лежандр выдерживает строгость геометриче-

ского рассуждения и лишь изредка впадает в ту иллюзорную точность, от которой предостерегает Даламбер.

Не подлежит никакому сомнению, что со всеми этими основными сочинениями по элементарной геометрии Лобачевский был хорошо знаком. Руководства Безу, Лежандра и Лакруа были уже переведены на русский язык. О работах Лежандра по основам геометрии и о его «Началах» Лобачевский часто упоминает. Свой курс анализа, как он сам указывает, он читал по учебнику Лежандра. «Энциклопедия» в России была распространена; плану Даламбера были посвящены и русские статьи. Можно поэтому сказать, что руководящими сочинениями, по которым складывались воззрения Лобачевского на основания геометрии и на их преподавание, помимо Евклида, были работы Даламбера, Лежандра и, может быть, Лакруа. Руководство Безу было слишком элементарным, чтобы иметь серьезное влияние.

Скажем несколько слов о том, какова была в ту эпоху русская учебная литература по началам геометрии. Прежде всего об Евклиде. Уже в XVIII в. было выпущено в свет три перевода «Начал» на русский язык. В 1739 г. был издан перевод Сатарова, сделанный с латинского языка. Он был выполнен под руководством англичанина Фарварсона (A. Farwarson). Этот профессор Абердинского университета был приглашен в Россию Петром I. Фарварсон выпустил в России ряд учебников по математике, в том числе перевод «Начал» в сокращенном и переработанном виде.[1] Хотя этот перевод был, таким образом, предназначен для школы, но вряд ли он для этой цели служил; распространения он во всяком случае не получил.

В 1764 г. был издан перевод Курганова с французского, повидимому с издания Дешаля, и, наконец, в 1784 г. Суворовым и Никитиным был опубликован перевод с греческого. Эти переводы, конечно, также не имели сколько-нибудь широкого школьного значения: слишком низка еще была для этого в России математическая культура; они предназначались для избранников-любителей и высокими достоинствами не отличались. В 1819 г. появился перевод

---

[1] «Евклидовы элементы, из двенадцати ньютоновых книг выбранные и восемь книг через профессора Фарварсона сокращенные, которые переводил с латинского хирургус Сатаров в 1719 г.».

Петрушевского.[1] Он был сделан с так называемого Оксфордского греческого издания и выполнен очень тщательно; никогда позже мы не имели такого хорошего русского издания Евклида. Издание «Начал» Петрушевского получило значительное распространение в математических кругах, но учебником и оно, конечно, не служило; переводчик и сам говорит в предисловии, что это сочинение предназначается для «любителей» геометрии.

Таким образом, настоящего школьного издания Евклида в России не было. Петрушевский, впрочем, не рекомендуя своего перевода в качестве учебной книги, повидимому, считался только с фактическим состоянием русской школы. По существу, он принадлежал к числу тех почитателей Евклида, которые совершенно безоговорочно признавали «Начала» наиболее совершенным, непревзойденным учебным руководством по геометрии. В своем предисловии он оспаривает решительно все указания, которые делались на недостатки «Начал», хотя бы как учебной книги. Не называя Даламбера, он оспаривает все его положения и даже сложную евклидову теорию пропорций считает достаточно приспособленной для преподавания учения о геометрической пропорциональности.

Такое же тяготение к Евклиду особенно настойчиво проявлял академик С. Е. Гурьев. В 1789 г. он опубликовал большое сочинение, посвященное научной обработке начал геометрии,[2] а затем в 1811 г. он издал обстоятельный курс элементарной геометрии.[3] В предисловии к этому руководству Гурьев приводит план Даламбера, но соглашается только со следующими его словами, которые мы в переводе Гурьева и приводим: «Дабы составить превосходные элементы геометрии, Декарт, Ньютон, Эйлер, Лейбниц, Бернулли и другие не были бы через меру велики», и потому, «нигде не находя ни начал сея науки, отличительным образом означенных и потом сходственное с сим отличением на самое дело употребленных, нижѐ предмета

---

[1] «Евклидовых начал восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии». Перевод с греческого Ф. Петрушевского с прибавлениями и примечаниями. СПб., 1819.

[2] С. Гурьев. Опыт усовершенствования начал геометрии. СПб., 1798.

[3] С. Гурьев. Основания геометрии, 517 стр. и 11 листов чертежей. СПб., 1811.

оной, в надлежащем виде представленного и потом соответственно сему виду изложенного, мы принужденными нашлися столь известную науку излагать снова». Гурьев считает, что Евклид стоит бесспорно выше всех его критиков, в том числе и Даламбера; но совершенным он его творение не признает и потому считает нужным собственными силами его усовершенствовать как с научной, так и с учебной стороны. Это — лейтмотив всех комментаторов Евклида, к числу которых Гурьев, несомненно, принадлежит, далеко уступая, однако, например, своему современнику Кёстнеру в знании первоисточников. Казалось бы, уже самые размеры этого сочинения — свыше 500 страниц убористого шрифта — говорят за то, что для обучения геометрии в школе оно непригодно. И при всем том «Основания геометрии» академика Гурьева были признаны основным руководством для кадетских корпусов, повидимому в силу авторитета автора, а может быть потому, что книга была посвящена «державнейшему великому государю Александру Павловичу».

Перечисляя в конце своего отзыва о «Геометрии» бывшие в то время в ходу лучшие руководства по геометрии, с которыми книга Лобачевского, конечно, не могла конкурировать, Фусс называет, кроме «Оснований» Гурьева, переводные книги Безу, Лежандра и Лакруа, а также русские — Румовского, Гамалеи и Осиповского. Он, естественно, не упоминает о своем собственном руководстве.[1] Мы, однако, на нем несколько остановимся. Эта книга предназначалась для военных учебных заведений, но только сухопутных. Она несомненно доступнее книги Гурьева. На ней лежит явный отпечаток влияния Безу, и не без пользы для дела. Как учебная книга она, несомненно, стоит выше «Оснований» Гурьева, но той «неупустительной» строгости, которую Фусс требует от учебника в своем отзыве, в его книге нет и следов. К тому же оригинал написан по-французски и очень скверно переведен на русский язык. Книга в этом виде производит неприятное впечатление, не соответствующее научному авторитету автора — академика.

Останавливаться на разборе других русских руководств того времени по элементарной геометрии и входить в рас-

---

[1] Н. Ф у с с. Геометрия в пользу и употребление обучающегося благородного юношества в п. сухопутном шляхетском корпусе. СПб., 1799.

62.1

смотрение каждого из них вряд ли целесообразно. Мы отметим только курс профессора Харьковского университета Т. Осиповского.[1] В противоположность учебникам Гурьева и Фусса, он был составлен не для военных, а для гражданских учебных заведений, издан Главным правлением училищ и, нужно сказать, составлен гораздо тщательнее, гораздо лучше не только в педагогическом, но и в научном отношении. Он несет на себе ясно выраженную печать влияния Лежандра и Даламбера. Это не является неожиданностью. Осиповский вообще был человеком прогрессивного образа мыслей.

Таким образом, в первую четверть XIX в. в России существовали те же взгляды на учебник геометрии, что и во Франции, отражая тенденции французских геометров. В наиболее влиятельных академических кругах преобладало тяготение к Евклиду. В педагогических кругах было сильнее влияние Даламбера, Лежандра и Лакруа; ничего принципиально нового сами они не вносили. Выделяя поэтому сочинения, которые могли иметь влияние на Лобачевского, когда он составлял «Геометрию», нужно только повторить, что это были «Начала» Евклида, статьи Даламбера и «Начала» Лежандра, может быть Лакруа; все остальное незначительно и не попадало в круг этих идей.

IX. Обзор сочинения «Геометрия»

К какому из воззрений на построение начал геометрии примыкал Лобачевский? Прежде всего нужно сказать, что Лобачевский никогда не благоговел перед Евклидом. Во введении к первому же опубликованному им сочинению — «О началах геометрии» — он говорит: «Кто не согласится, что никакая математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию?»

Человек своеобразного, оригинального склада ума, Лобачевский всегда искал своих путей всюду, куда направлялась его мысль. И общая тенденция, отчетливо проходящая через все его небольшое первое сочинение, есть стремление порвать со старыми классическими традициями, поискать собственных, других путей для построения основ

[1] Т. Осиповский. Курс математики, изданный от Главного правления училищ. СПб., 1814 (изд. 2-е).

геометрии. И, может быть, здесь, в этой сложной задаче построения всей системы геометрии, молодой Лобачевский еще не добился большого успеха; но и здесь он шел тем путем напряженного искания, который потом привел его к замечательным открытиям. Однако, именно это стремление освободиться от оков традиции, несомненно, было главной причиной того осуждения, которое встретила первая же его работа.

Влияние Даламбера отчетливо проникает все сочинение; но Лобачевский идет дальше Даламбера, он гораздо глубже перестраивает геометрию, нежели это сделали Лежандр и Лакруа. Прежде всего влияние Даламбера сказывается на самом определении геометрии. В противоположность установке Евклида, он считал, что «Геометрия есть часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство». Эта метрическая точка зрения была прогрессивной у Даламбера: она была отчетливо направлена против обучения основам геометрии по чисто формальной системе Евклида, отрывающей геометрию от каких бы то ни было ее приложений, сводящей ее только к тонкой логической концепции. Однако для студенческой аудитории в 10-х годах прошлого века это уже был недостаточно широкий взгляд, не оставлявший в геометрии ничего, кроме метрики, и притом взгляд для той эпохи уже не вполне современный. Со времени опубликования плана Даламбера прошло уже 60 лет; в это время именно во Франции шло возрождение синтетических методов; Монжем уже была опубликована «изобразительная», или, как теперь говорят, «начертательная» геометрия; к ней примыкала «геометрия положения» Карно. Целая школа геометров развивала эти идеи в «Анналах» Жергона, а в 1812 г. появился знаменитый трактат Понселе; говорить в ту пору студентам, что геометрия занимается исключительно измерением пространственных протяжений, было односторонним и во всяком случае уже несовременным. Очевидно, в ту пору научные течения медленно докатывались до далекой Казани.

Во всяком случае на этой метрической точке зрения Лобачевский стоит твердо. Вся книга разбивается на тринадцать глав, из которых десять как по названию, так и по содержанию посвящены измерению тех или иных геометрических величин (измерению линий, углов, телесных углов, треугольников, призм и т. д.), а остальные три под-

готовляют для этого необходимые средства (учение о перпендикулярных прямых, о равенстве треугольников, о параллельных линиях). И все содержание геометрии Лобачевский делит на лонгиметрию, планиметрию и «стереометрию» именно в том понимании этих терминов, на котором настаивает Даламбер (измерение длин, измерение площадей, измерение объемов), даже более решительно это отмечая. В этой своей метрической точке зрения Лобачевский идет так далеко, что угол он определяет только как численное значение дуги (в градусах или радианах), содержащейся между его сторонами; и эту точку зрения он сохраняет позже во всех своих сочинениях. Нельзя не видеть в этом влияния статьи Даламбера.

Обращаясь теперь к общей системе изложения, нужно сказать, что «химерическая» схоластическая строгость Лобачевскому совершенно чужда. Следует ли он в этом отношении Даламберу или в воззрениях Даламбера он нашел опору для своих собственных взглядов на этот предмет, — но аксиом Лобачевский не приводит нигде, ни в «Геометрии», ни в последующих сочинениях. «Геометрические исследования» он начинает пятнадцатью предложениями, которые принимает за исходные или известные; большинство из них представляет собою теоремы, доказательства которых общеизвестны, другие обычно входят в определения или аксиомы; Лобачевский не делает между ними различия. Даже в «Новых началах», в этой фундаментальной попытке построения всей системы геометрии, Лобачевский не приводит аксиом. Он хорошо знает цену аксиоматике своего времени и предпочитает, как Даламбер, не давать химерического обоснования геометрии; для подлинного же обоснования геометрии именно он позже и заложил надежный фундамент.

Из основных понятий геометрии Лобачевский в «Новых началах» выдвигает на первый план «прикосновение тел» и делает это понятие точкой отправления при построении всей геометрии, развертывая эту идею в целую систему. Первый замысел этой системы мы видим уже здесь, в «Геометрии», в первых же строках; Лобачевский, таким образом, пришел к нему очень рано. Он еще не пытается сделать это понятие краеугольным камнем при построении всей геометрии; но он уже начинает изложение геометрии с этого понятия, которому, как увидим, он позже придает основное значение.

Одним из коренных вопросов в деле построения элементарной геометрии является та роль, которая при этом должна принадлежать движению. Евклид отводит движению незначительное место: установив при помощи движения равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними (предложение 4 книги I) и по трем сторонам (предложение 8 книги I), Евклид в дальнейшем тщательно избегает пользоваться движением, заменяя его формальными рассуждениями, основанными на условиях равенства треугольников. Даламбер, в противовес этому, предлагает пользоваться движением и, в частности, наложением, как основным методом геометрического доказательства. Лежандр в некоторой степени следует этому указанию. Лобачевский идет по этому пути решительнее, чем это делал кто-либо до него или даже в ближайшие годы после него. Всякое сопоставление в смысле установления условий равенства или неравенства Лобачевский проводит, сводя соответствующие фигуры в пространстве. Позднее Гельмгольцем, Софусом Ли и Клейном движение было признано основной характеристикой геометрии (см. главу XIV). Правда, Лобачевский не формулирует законов движения; но, как уже сказано, он избегает всякой аксиоматики.

Построение метрики в геометрии всегда связано с большей или меньшей ее арифметизацией, и такая арифметизация Лобачевским действительно проводится. Спор о геометрической или арифметической теории пропорций, таким образом, решается сам собою: отношение для Лобачевского всегда есть число. Так как измерение приводится к нахождению отношения двух значений величины (двух «коликих»), то Лобачевский в первой же главе приводит евклидов алгорифм для разыскания общей меры; получающееся в результате отношение он выражает непрерывной дробью, наиболее отражающей геометрический процесс.

Случай несоизмеримости играет, как известно, в этой арифметизации, в этом стремлении выразить отношение двух отрезков числом особую роль; его обработка как с теоретической, так и с педагогической стороны служила предметом многостороннего обсуждения и споров со времен Евклида, и, можно сказать, вплоть до наших дней. Трудность заключается здесь в двух моментах: во-первых, в самом определении несоизмеримого отношения, т. е. иррационального числа; во-вторых, в учении о пропорцио-

нальных величинах разного рода, т. е. в доказательстве равенства или неравенства иррациональных чисел или несоизмеримых отношений. Евклид сосредоточивает внимание на второй проблеме: он определяет не самое отношение, которое, как число, для него вовсе не существует, а только условия, при которых два отношения равны или не равны; для этого он и излагает своеобразную теорию пропорций. Даламбер также игнорирует первую проблему; но он молчаливо всегда постулирует существование числа, выражающего отношение двух несоизмеримых значений одной и той же величины; доказательство равенства несоизмеримых отношений он рекомендует всегда производить приведением к абсурду; Лежандр и Лакруа так это неизменно и выполняют. Лобачевский вообще не любит доказательств от противного; к этому приему он прибегает очень редко, скорее для сокращения рассуждения, чем для придания ему строгости. Его аналитический ум всегда ищет прямого доказательства каждой истины. В современной математике, в теории иррациональных чисел или несоизмеримых отношений, внимание сосредоточивается на первой проблеме. В той или иной форме несоизмеримое отношение всегда определяется совокупностью его последовательных приближений, и тогда равенство несоизмеримых отношений заключается в надлежащей близости соответствующих приближений. К этой последней точке зрения, по существу, приближается и Лобачевский. Строгий, до некоторой степени односторонний эмпирик, он признает только процессы, фактически выполнимые. Разыскивая отношение так называемым алгорифмом Евклида («Начала», VII_2), т. е. последовательным делением, он считает, что этот процесс заканчивается тогда, когда остаток перестает быть доступным нашим ощущениям. Он говорит (глава I): «Наконец не должно выходить остатку или, что все равно, быть так малу, что чувства не могут его давать знать, тем менее точно мерять». В этот момент процесс обрывается, отношение представляет собой рациональное число, выражаемое непрерывной дробью. Для Лобачевского, таким образом, существуют только рациональные приближенные отношения, выражаемые с любой доступной нам точностью. Вопрос об иррациональных отношениях как бы отпадает; при установлении пропорциональности Лобачевский всегда доказывает, что соответствующие отношения

будут равны, какова бы ни была доступная нам точность. По существу, это, конечно, лишь иное выражение той же идеи, лежащей в основе современной постановки вопроса; немногое нужно изменить в формулировках Лобачевского, чтобы к ним присоединился современный математик.

Для измерения нужны единицы меры. Верный французской школе, Лобачевский вводит метрическую систему с ее децимальными подразделениями, сохраняя также центезимальное деление прямого угла. Как, может быть, никто другой в России того времени, он понимал значение единого стандарта и упрощенной техники арифметических вычислений. И с первого же сочинения, предназначенного для печати, он выступает со своими своеобразными взглядами, не страшась «крика беотийцев». Очень характерно, что всюду и везде он выступает борцом за несомненно прогрессивную точку зрения.

Лобачевский с самого начала делит геометрию на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию, однако в метрическом (даламберовом) понимании этих терминов (измерение длин, площадей и объемов). Но во всем, что не составляет предмета прямых измерений, Лобачевский не отделяет предложений плоской геометрии от аналогичных предложений, относящихся к пространству. Так, уже во II главе он рядом с кругом рассматривает шар и сферу. И здесь уж лежат зародыши той общей системы геометрии, которую он строит в «Новых началах». В III главе — «О перпендикулах» — он рассматривает взаимное расположение плоскостей, а в IV главе рядом с измерением прямолинейных углов рассматривает измерение телесных, рядом с многоугольниками рассматривает многогранники. Лобачевский, таким образом, уже в начале века стоял на позиции фузионизма, которую в конце века защищали многие математики и педагоги. Фузионистскую точку зрения при построении начал геометрии нельзя считать общепризнанной; она имеет многих противников; и в то время она была еще совершенно нова; мы не знаем автора, который до Лобачевского становился бы на эту точку зрения. Между тем, именно при повторном обзоре геометрии проводить эти сближения двумерных и трехмерных соотношений безусловно целесообразно. Но Лобачевский имеет при этом и своеобразную, очень характерную для его дальнейшего творчества цель, о которой скажем ниже. Во всяком случае и в этом скрывается та оригиналь-

ность системы, которая так характерна для Лобачевского вообще, для этого сочинения в частности.

Очень характерным для всякого курса геометрии является изложение вопроса об измерении длины окружности, площади круга, поверхностей и объемов круглых тел. По существу есть три способа изложения этого вопроса. Первый заключается в том, что предложение формулируется и доказывается от противного: так Евклид доказывает, что треугольные пирамиды, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики; этого же метода придерживается единообразно и Лежандр. Второй способ заключается в применении принципа Кавальери в той или другой форме; так доказывают ту же теорему о равновеликости пирамид Безу и Фусс. Третий способ есть метод прямого вычисления переходом к пределу: это — метод исчерпывания, как его понимал еще Архимед; это — метод интегрирования, как его понимали Лейбниц и Ньютон. В этом последнем порядке идей всегда проводит вычисления Лобачевский, и притом обыкновенно методом, который ближе всего подходит к интегрированию; его вычисление объема шара есть элементарное вычисление интеграла

$$2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx.$$

Очевидно, выяснить своим слушателям, что здесь мы имеем дело с чистым интегрированием, и составляет задачу, которую ставил Лобачевский. Многие педагоги в наши дни особенно настойчиво отстаивают такое изложение учения об измерении площади круга и объема шара.

Остановимся еще на том принципе, которому Лобачевский следует при расположении материала. Академик Гурьев в предисловии к своей книге говорит, что система изложения может быть расположена «либо соображенная с началами, или соображенная с предметами». Расположение, сообразованное с началами, восходит от простейших понятий и образов к более сложным, рассматривая прямые линии, углы, треугольники, четырехугольники, многоугольники, окружности и т. д.; при изучении более сложного объекта в этой системе можно пользоваться заранее подготовленными установленными свойствами более простых объектов. Изложение, сообразованное с предметом, заключается в том, что каждый раз в соот-

ветствии с основной задачей приводятся те подсобные предложения, которые здесь именно нужны. С точки зрения такого подразделения, если его считать правильным, система Евклида «сообразована с началами» (так Гурьев и утверждает), система Лобачевского «сообразована с предметами». Постоянно пользуясь непосредственно движением, Лобачевский отодвигает учение о равенстве треугольников до V главы и излагает даже учение о правильных многоугольниках и многогранниках без его помощи. Не всегда это дает хорошие результаты. Конечно, наложение делает многие доказательства более наглядными; но нередко это вызывает длиноты и повторения.

К числу вопросов, значительно отодвинутых в изложении, принадлежит и учение о параллельных линиях. Кто знает дальнейшее направление работ Лобачевского, тому ясно, какую роль учение о параллельных линиях уж играет в «Геометрии»; мы к этому возвратимся ниже; здесь уже отчетливо намечаются установки, которые приведут в дальнейшем к отходу от геометрии Евклида.

Учение об измерении прямолинейных фигур и многогранников без дифференциальных приемов составляет вторую часть геометрии; по существу, оно выполнено по плану Даламбера, но своеобразно (главы VI—IX).

Наконец, третью часть книги составляют те измерения, которые выполняются при помощи интегрирования. И этим путем, прямым интегрированием, Лобачевский ведет вычисления, начиная с площади круга, с объема пирамиды и кончая объемом шара.

Таким образом, ясно, что Лобачевский при составлении «Геометрии» находился под явно выраженным влиянием французской школы, что он не считал системы Евклида верхом совершенства и искал пути построения основ геометрии на новых началах. И не только в этих общих чертах, не только в систематизации и расположении материала, но и в каждом рассуждении можно видеть оригинальную мысль, стремящуюся отойти от традиций и провести доказательство своеобразно, по-новому. И это не просто желание быть оригинальным во что бы то ни стало: всюду и всегда можно видеть те принципиальные мотивы, которые побуждали автора итти не традиционным, а своеобразным путем. Иногда его доказательства прерываются рассуждениями того или другого комментатора Евклида; не всегда они удачны, но всегда можно усмот-

реть ту цель, которая руководила автором при выборе системы, метода рассуждения. Самая характерная черта всего сочинения — это искание новых путей в построении начал геометрии, стремление по крайней мере в этом обзорном курсе отойти от укоренившихся, веками утвержденных традиций, которые выдающиеся французские геометры не считали лучшими путями построения системы геометрии даже в учебной книге. Эти искания Лобачевский вел уже давно; как мы знаем, в 1819 г. они сложились в форму сочинения «Основание геометрии». В 1823 г. они были оформлены в виде учебной книги, которую Лобачевский представил к напечатанию.

Мы очень подробно остановились на обзоре «Геометрии». Мы сделали это потому, что не разделяем того мнения, которое высказывалось об этом сочинении устно и печатно. Утверждают, что это сочинение слабое, и слышатся даже нотки колебания, не прав ли был до некоторой степени Фусс. Это совершенно неправильно. Сочинение имеет дефекты; оно еще недостаточно обработано. Но кто изучал работы Лобачевского, тот несомненно признает, что в этом первом его произведении он уже виден весь, со всем его своеобразием, упорным нежеланием итти по шаблонному пути, исканиями и замыслами.

Расхождение между Фуссом и Лобачевским в существе своем коренилось в том, что Фусс принадлежал к школе Эйлера, Лобачевский — к школе Коши и Гаусса. И Эйлер, и Коши, и Гаусс были гениальными математиками; но в методологии, в оценке математических рассуждений, которые можно считать убедительными, Коши и Гаусс оставили Эйлера далеко позади. Это умонастроение, эта глубина и тонкость мысли, эта склонность выяснить все сомнения без остатка, не оставаясь в оковах традиций, все это, а не прямые соображения, относящиеся к теории параллельных линий, Лобачевский через Бартельса действительно унаследовал от Гаусса. И наследие это можно выразить известным афоризмом:

Мудрец отличен от глупца
Тем, что он мыслит до конца.

СОЗДАНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

X. Падение Магницкого. Основной доклад Лобачевского

В период, к которому относится инцидент с «Геометрией», Магницкий находился в апогее своей власти. Не только в Главном правлении училищ, но и в министерстве он был главным действующим лицом; он стремился к тому, чтобы нормы, насажденные им в Казанском университете, были водворены во всех университетах страны, чтобы все просвещение в России пошло по пути, предначертанному им для своего округа. И до некоторой степени это ему удавалось. Рунич в 1821 г. провел в Петербургском университете меры, которые мало отличались от того, что Магницкий установил в Казани; оставалось распространить их на другие университеты и округа. Голицын колебался, он не был склонен итти по этому пути так решительно, как того хотели Магницкий и Рунич. Повидимому, это было главной причиной, побудившей Магницкого изменить Голицыну.

На почве религиозных расхождений у кн. Голицына возникла распря с фанатичным митрополитом московским Фотием, вскоре перешедшая в открытую и острую вражду. К Фотию присоединились Аракчеев и митрополит петербургский Серафим. Чувствуя, что положение Голицына становится шатким, и будучи недоволен его нерешительностью, Магницкий ему изменил, как некогда изменил Сперанскому, и присоединился к создавшемуся уже три-

умвирату;[1] образовался своеобразный заговор, который очень скоро перестал быть тайным. Голицын был вынужден подать в отставку; на его место министром духовных дел и народного просвещения был назначен адмирал А. С. Шишков. Магницкий, как один из заговорщиков, по-видимому, считал Шишкова до некоторой степени обязанным ему своим назначением. Представляя новому министру свой первый отчет, он подчеркивает, что имеет в виду дать «свидетельство того, что посреди всеобщей заразы вредных учений может быть устроен университет по направлению наук и духа православный и настояще отечественный», а также «доказательство того, что ежели в одном из шести наших университетов могли сии распоряжения иметь успех, то и во всех других необходимо нужно бы было сделать единообразное преобразование».[2]

Однако Магницкий просчитался; звезда его закатилась, а Шишков отнюдь не был склонен считать себя чем-либо обязанным Магницкому. Шишков был человеком глубоко консервативных воззрений; по существу они мало отличались от воззрений Голицына и Магницкого. В первом же заседании Главного правления училищ, происходившем под его председательством, он заявил: «Науки, изощряющие ум, не составят без веры и нравственности благоденствия народного. Науки полезны только тогда, когда, как соль, употребляются и преподаются в меру, смотря по состоянию и по надобности, какую всякое звание в них имеет; излишество их, равно как и недостаток, противны истинному просвещению. Обучать грамоте весь народ или несоразмерное количество людей принесло бы более вреда, чем пользы».[3]

Казалось бы, это та же линия, которую вел и Магницкий. Но отсутствие у последнего какого бы то ни было чувства меры и своеобразная политическая обстановка, сложившаяся в связи с событиями конца 1825 г. и начала 1826 г. (восстание декабристов), скоро привели к разрыву

---

[1] Об этом см. Н. Н. Б у л и ч. Очерки.., лекции XXIX и XXX; Н. П. З а г о с к и н. История Казанского университета, т. IV, стр. 475, 476. Любопытно, что Александр оказался прозорливее Голицына и, утверждая представление Голицына о назначении Магницкого попечителем, предупреждал Голицына, что тот его предаст, как только это ему окажется выгодным.

[2] Н. П. З а г о с к и н. Там же, т. IV, стр. 449.

[3] Там же, стр. 482.

между ними. Это имело для Магницкого роковые последствия. Сначала, правда, слабый физически, бесхарактерный и утомленный старый адмирал был склонен прислушиваться к Магницкому, подчиняться ему подобно тому, как некогда Румовский подчинялся Яковкину. Но это продолжалось недолго.

Первым поражением Магницкого была судьба проекта, представленного им еще Голицыну, о полном прекращении в русских университетах преподавания философских наук. Основной довод Магницкого заключался в том, что «нет никакого способа излагать эту науку не только согласно с учением веры, но даже безвредно для него». Проект Магницкого был послан на обсуждение попечителям всех учебных округов, о нем были запрошены различные авторитетные лица; почти никто не отнесся к этому предложению с сочувствием. Магницкий переусердствовал, его проект провалился. Однако в своем округе он нашел своеобразный выход: преподавание философии он поручил архимандриту Гавриилу, настоятелю Залаишевского монастыря близ Казани, преподавателю богословия. Но как в Петербурге, так и в Казани создалась оппозиция Магницкому. Впрочем такая оппозиция существовала и раньше; еще первый отчет Магницкого о произведенной им ревизии Казанского университета, как мы знаем, встретил возражения со стороны С. С. Уварова; повидимому, именно благодаря этим возражениям Казанский университет не был вовсе уничтожен. Во время суда над петербургскими профессорами Уваров вновь возвысил свой голос, на сей раз в письме к царю; повидимому и на этот раз он оказал влияние на ход событий. Еще решительнее против Магницкого выступил профессор Дерптского университета Г. Ф. Паррот, в то время известный физик, которого Александр в молодые годы приблизил к себе и которому он доверял. Паррот представил Александру докладную записку о тех возмутительных безобразиях, которые Магницкий творит в Казанском округе. «Я сто раз спрашивал себя, — писал он в письме, при котором препроводил свою записку Александру, — какими средствами этот дикий человек успел достигнуть столь гибельного влияния в министерстве». Однако юношеские симпатии в сердце Александра в то время уже угасли; он не дал этой записке движения. После петербургского и казанского процессов, когда обнаружились результаты деятельности Магницко-

го, он вызвал к себе отрицательное отношение в широких кругах как петербургского, так и казанского общества. Но Магницкий не унимался и в начале 1825 г. стал писать Шишкову доносы даже на членов царской фамилии, обвиняя их в попустительстве либералам; обвинения относились и к брату Александра, будущему императору Николаю Павловичу. Для Шишкова это было уже слишком; когда же Магницкий не унялся даже после внушительной отповеди Шишкова, последний «стал принимать против него меры». Враждебная Магницкому группировка образовалась и в министерстве; к ней активно примкнул и давно нам знакомый Г. И. Карташевский, некогда изгнанный Яковкиным из Казанского университета, а теперь влиятельный чиновник министерства. Эти лица обратили внимание Шишкова на два важных обстоятельства. Во-первых на то, что Магницкий совершенно не был в Казани с самого назначения его попечителем, а потому как следует не может знать того, что там происходит; во-вторых они обнаружили, что финансовые дела округа не в порядке и что Магницкий расходовал средства далеко не без пользы для себя. Шишков предписал Магницкому немедленно выехать в Казань для ознакомления с делами округа и университета, с успехами студентов и учащихся на месте. Не без некоторого сопротивления Магницкий это выполнил. В какой экстаз его привел университет, реорганизованный по его инструкциям, видно из приведенной нами выше речи (стр. 68), которую Магницкий произнес на торжественном акте университета. Не делая еще никакого доклада министру, Магницкий поспешил опубликовать эту речь в «Московских ведомостях» и в «Journal de St. Petersbourg». Это саморекламирование вызвало недовольство министра и послужило благодарным материалом для действия враждебных Магницкому лиц. Мы не можем останавливаться на очень любопытных подробностях последовавших событий; отсылая читателя, который ими заинтересуется, к книге Загоскина[1] и к воспоминаниям В. И. Панаева,[2] одного из питомцев Казанского университета, ограничимся только следующим.

19 (31) ноября 1825 г. скончался император Александр

---

[1] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. IV, глава V.

[2] В. И. Панаев. Воспоминания, глава III. Вестник Европы, т. IV, 1867, декабрь.

Павлович, шла присяга Константину. Магницкий, не испросив разрешения министра, возвратился в Петербург. Повидимому, не будучи еще осведомлен о происходящих переговорах о передаче престола Николаю, он поспешил послать льстивое приветствие Константину. Мало того, он выступил с речами, настолько неумеренными, что обратил на себя внимание графа Милорадовича, петербургского губернатора, застреленного вскоре на Сенатской площади. Узнав от министра, что Магницкий находится в Петербурге без его разрешения, Милорадович немедленно выслал его обратно в Казань, даже в сопровождении офицера. Такова ирония судьбы — Магницкий был заподозрен в причастии к декабрьскому восстанию. Это недоразумение скоро выяснилось. Но докладная записка Магницкого с указанием на либерализм Николая Павловича, повидимому, попала в руки последнего. В связи с теми обвинениями, которые уже раньше были выдвинуты против Магницкого, генералу П. Ф. Желтухину, жившему в Казани, было поручено произвести ревизию Казанского университета и всей деятельности Магницкого. Вот как Желтухин описывает общее впечатление, произведенное на него университетом: [1]

«Университетское начальство постановило себе правилом внушать студентам преимущественно уважение к церкви... Но если при сем принять в соображение бывшие в разное время предписания: чтобы студенты при вступлении в университет имели непременно библию; чтобы пред завтраком и ужином читались молитвы по канонику; чтобы во время самых завтраков, обедов и ужинов один из студентов делал чтение из библии и иных христианских книг; чтобы проступившиеся воспитанники назывались грешниками, отдавались на руки духовнику, который их увещевает, исповедует и удостаивает св. тайн; чтобы во время сего исправления возносились общие молитвы сотоварищей и их начальства об обращении грешников; если, наконец, допустить, что все сии правила, приличные самым строгим монастырским обителям, исполняются в точности питомцами университета, — в таком случае можно иметь справедливое опасение, чтобы в сих молодых людях не укоренилось лицемерие, столь пагубное, под личиною благочестия скрывающее многие пороки, вредные

[1] Е. Феоктистов. Назв. соч., стр. 206.

для благосостояния гражданских обществ». Упомянув о карцере для провинившихся студентов, о железных решетках, распятии и изображении страшного суда, Желтухин говорит: «Войдите в рассмотрение, какое впечатление должна иметь на пылкий ум молодого человека вся эта обстановка, среди которой ожидает он духовника или увещания!»

Столь же неблагоприятны были отзывы Желтухина об успехах студентов, о состоянии средств и их расходовании.

Магницкий представил ряд докладных записок, в которых всемерно старался опровергнуть все возведенные на него обвинения, дискредитировать ревизора; но это не помогло. Он был уволен от должности попечителя Казанского округа, а по делу о расходовании им сумм было назначено дополнительное следствие. Но так как он продолжал из Казани лично или через своих клевретов забрасывать Петербург всевозможными донесениями, он был выслан в Ревель.

Так окончился мрачный период управления Магницким Казанским учебным округом и университетом.

Желтухин приступил к ревизии университета 9 (21) февраля. Через два дня после этого в Казанском университете произошло событие очень большой важности. 11 (23) февраля 1826 г. в заседании физико-математического факультета был заслушан доклад Н. И. Лобачевского «Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse de la théorème de parallèles».[1] Доклад был представлен в письменном виде на французском языке, готовым к печати. Этот день рассматривается как день рождения неевклидовой геометрии. Он является гранью двух эпох. Предшествующие годы — три тысячи лет, протекшие от зарождения геометрии на Востоке — были эпохой создания классической геометрии, ее внедрения в сознание математиков, в сознание всякого элементарно образованного человека. Начала, лежащие в ее основании, а вместе с тем и вся геометрия считались совершенно незыблемыми, не вызывающими никаких сомнений, не допускающими никаких изменений. Вследствие

[1] «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

этого геометрия росла, но не эволюционировала. Возрастало число вскрытых геометрических фактов; но они все проистекали из одного старого источника, а потому геометрия как система казалась совершенно застывшей в своих древних, эллинских формах.

Сменялись народы, культивировавшие геометрию. С Древнего Востока она проникла в долину Нила; от египетских жрецов она перешла к греческим философам, развившим ее в обширную науку; с распадом греческой культуры она перешла к арабам и ими вновь перенесена в Европу, в Италию и Испанию; ее культивировали немецкие монахи, французские энциклопедисты, английские пасторы и доктора. Менялись методы математического исследования. Тонкий синтез греческих геометров нашел опору у арабских аналистов; народилась тригонометрия, выросла алгебра, сложился анализ бесконечно малых, — и все эти методы исследования нашли себе широкое применение в геометрии. Была построена аналитическая и дифференциальная геометрия; и точно в противовес этим стремлениям анализа народилась новая синтетическая геометрия, так называемая геометрия положения. Геометрия быстро росла, как кристалл, погруженный в насыщенный раствор, сохраняя свои неизменные формы.

Но 11 (23) февраля 1826 г. положение коренным образом изменилось. В Казани, в университете, далеко от европейских центров математической культуры, русский геометр, ушедший от современной ему общественно-политической жизни в углубленные научные размышления, создал новую разновидность геометрии, направил ее на новый путь далеко идущей эволюции, положил начало новой эпохе в области геометрии. В этот день перед физико-математическим факультетом Казанского университета стоял не просто молодой профессор, к знаниям и преподаванию которого факультет уже привык относиться с неизменным уважением; перед факультетом стоял творец новой науки, создатель новой эпохи в области геометрии.

Чтобы ввести читателя в круг этих своеобразных идей, необходимо возвратиться к классической геометрии, к «Началам» Евклида. Об этом сочинении знаменитого эллинского геометра мы уже говорили в плане его педагогического значения, теперь нам нужно на нем остановиться подробнее, вникнуть в особенности его научного строения.

XI. «Начала» Евклида

Проникновение геометрии в Грецию привело прежде всего к тому, что отрывочные, эмпирические, почти на-глаз установленные факты здесь, в ионийской философской школе и у пифагорейцев, начинают претворяться в цепь связанных между собой предложений; каждое из них занимает в этой цепи более или менее определенное место, логически вытекает из предыдущих, вместе с которыми обусловливает последующие. Достижения, быстро в этом направлении нараставшие, имели двоякое значение: во-первых, каждая теорема, логически выведенная из других, представляла собой завоевание, освобождавшее это предложение от эмпирической аргументации, как бы отодвигала участие интуиции к более простым, ранее установленным фактам; во-вторых, возможность получения геометрических истин средствами логического вывода стимулировала математическую мысль в направлении теоретических изысканий, обогащавших самое содержание геометрии. Соответственно этому развитие геометрии шло в Греции в двух направлениях: во-первых, стремились логическими средствами вскрыть возможно большее число геометрических истин; во-вторых, старались свести к возможному минимуму те геометрические факты, которые устанавливаются эмпирически, т. е. созерцанием, наблюдением, опытом; старались превратить геометрию в дедуктивную науку. В том и в другом направлении эллинская геометрия развертывалась очень успешно; в IV в. до н. э. появились сочинения, содержавшие обширный геометрический материал и носившие ясно выраженную печать дедуктивной логической системы. Одно из этих сочинений, принадлежавшее Февдию из Магнезии, было в ходу в академии Платона, служило руководством, по которому должны были учиться геометрии все желавшие вступить в академию. Платон (428—348 до н. э.) предъявлял особенно высокие требования к строгости геометрической дедукции. Его ученик Аристотель (384—322 до н. э.) дал этим требованиям точное выражение; в ряде логических сочинений, которые позже были объединены под общим названием «Органон», он указал пути и правила, которым надлежит следовать при выполнении этих требований; он создал теорию вывода. По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением свойственных ей кате-

горий — основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом — основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно быть строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. В следующем столетии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом.

К концу IV в. до н. э. центром интеллектуальной жизни греков становится Александрия. Здесь возникла и первая школа неоплатоников; здесь развернулась и деятельность Евклида (конец IV — начало III в. до н. э.). Составленные им «Начала» вытеснили все руководства по геометрии, существовавшие до него, и, как мы уже знаем, свыше двух тысяч лет безраздельно царили в школе и всюду, где учились геометрии. Постараемся дать некоторое представление о содержании этого замечательного сочинения.

«Начала» состоят из 13 книг. Книга I, в свою очередь, разбивается на три части. Первая часть посвящена главным образом учению о треугольниках: об их построении и о соотношениях между сторонами и углами одного и того же или двух различных треугольников; этому сопутствуют также свойства смежных и вертикальных углов. Вторая часть, начинающаяся с 27-го предложения (I_{27}, как обыкновенно пишут), посвящена теории параллельных линий и заканчивается предложением I_{32}, которое устанавливает, что сумма углов в треугольнике равна $2d$. На этой части нам придется ниже остановиться подробнее. Наконец, третья часть книги I начинается изложением основных свойств параллелограма и посвящена главным образом учению о преобразовании многоугольников в равновеликие им многоугольники (устанавливает, что всякий многоугольник может быть преобразован в равновеликий ему треугольник); она заканчивается теоремой Пифагора в ее чисто геометрической форме.

Книга II содержит так называемую геометрическую алгебру; она устанавливает ряд геометрических соотношений, эквивалентных тождествам элементарной алгебры — дисциплины, которая была древним грекам еще совершенно чужда. К числу простейших предложений этого рода принадлежит, например, разделение квадрата на два квадрата и два равных прямоугольника (рис. 1) — геометрический эквивалент тождества

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Книга II заканчивается преобразованием любого треугольника в равновеликий ему квадрат.

Книга III содержит учение об окружности, книга IV — о многоугольниках, вписанных в окружность или описанных около окружности, в частности, построение простейших правильных многоугольников. Книга V содержит замечательную теорию отношений и пропорций, возникшую вследствие того, что греки в этом учении не могли обойти отношения несоизмеримых отрезков, вообще двух несоизмеримых значений одной и той же величины; понятие же об иррациональном числе, которым отношение несоизмеримых отрезков может быть выражено, было древним грекам еще совершенно чуждо. Повидимому Евдоксом (408 — ок. 353 до н. э.), учеником Платона, было поэтому построено учение об отношениях, которое вовсе не рассматривает отношение двух значений величины как число, но с безукоризненной точностью строит теорию пропорций. Эта теория и воспроизведена Евклидом, вероятно, в собственной обработке. Основываясь на ней, книга VI содержит учение о подобии треугольников и многоугольников.

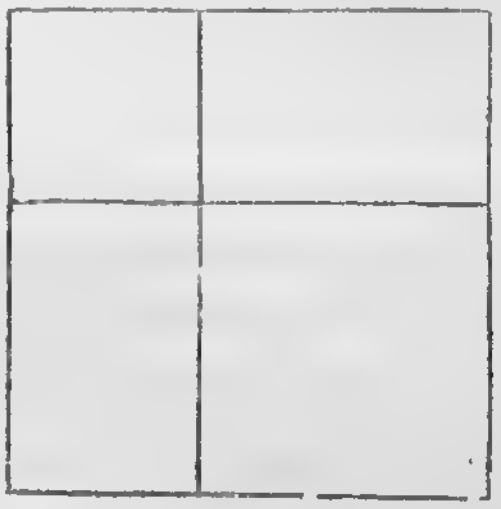


Рис. 1.

Книги VII, VIII и IX (так называемые арифметические книги) посвящены арифметике целых чисел; содержание этих книг излагает то, что мы в настоящее время назвали бы элементами теории чисел. Книга X, самая сложная и, может быть, самая замечательная, посвящена геометрической теории иррациональных величин.

Остальные три книги посвящены стереометрии. В известном смысле книга XI соответствует книге I в планиметрии, книга XII — соответствует книгам II и III, книга XIII — книге IV. Главное содержание сложной книги XIII заключается в строгом доказательстве существования пяти правильных многогранников.

Современный читатель, ознакомившись с текстом «Начал», узнает в них многое, чему он учился по современному учебнику геометрии, не только по содержанию, но и по форме, вплоть до формулировок отдельных теорем. Известный английский геометр де-Морган в середине прошлого века писал: «Никогда не было системы геометрии,

которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида; и до тех пор, пока я этого не увижу собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать». Если бы де-Морган дожил до нашего времени, он увидел бы такие сочинения.[1] Но не подлежит сомнению, что многие формулировки, построения, доказательства Евклида сохранили свое значение по сей день.

Выполнение требований Платона и схемы Аристотеля находит себе в «Началах» место в следующем виде. Каждая книга начинается определениями всех тех понятий, которые в этой книге встречаются; первой же книге предпосланы постулаты и аксиомы. До сих пор еще идут не лишенные основания споры о том, как Евклид (и даже еще Аристотель) отличают постулаты от аксиом; по существу, дело сводится к следующему. Аксиомы, которые Евклид называет κοιναὶ ἔννοιαι (общие достояния нашего ума), суть истины, относящиеся ко всяким величинам, не только геометрическим (например: две величины, порознь равные третьей, равны между собой; если к равным придать равные, то получим равные). Постулаты — это требования геометрического характера, которые читатель должен принять для того, чтобы он был вынужден признать все дальнейшие выводы.

За аксиомами и постулатами в книге I «Начал» следуют предложения геометрии, одно за другим почти в необходимой последовательности, сопровождаемые доказательствами, т. е. рассуждениями, логически выводящими каждое предложение из определений, аксиом, постулатов и предпосланных, уже ранее установленных предложений; некоторые предложения заменены конструктивными задачами.

Греческий текст «Начал» дошел до нас в довольно большом числе манускриптов. Однако большинство из них ведет свое начало от списка текста, выполненного Теоном Александрийским, жившим в середине IV в. н. э. В 1808 г. французский ученый Пейрар (F. Peyrard), филолог и математик, нашел в Ватикане манускрипт X в., содержащий список «Начал», с текстом, несомненно составленным до Теона. В различных библиотеках обнаружены также манускрипты, содержащие отдельные фрагменты «Начал» другого происхождения. Тщательное сли-

[1] Как на наиболее серьезное из них укажем H. G. Forder. The foundations of Euclidean geometry. Cambridge, 1927.

чение всех материалов дало возможность почти полностью восстановить подлинный текст Евклида; сомнительных мест остается немного, преимущественно в аксиомах и определениях, «исправить» которые переписчики особенно старались. Для установления подлинного текста «Евклида» имели значение и арабские переводы, появившиеся в большом числе начиная с IX. в. н. э. Сопоставлением манускриптов и исследованием текстов занимались многие математики и филологи. С большим успехом это совместно выполнили датский математик Гейберг (J. Heiberg) и германский филолог Менге (H. Menge). Установленный ими текст «Начал»[1] в настоящее время считается наиболее достоверным. Согласно этому изданию, «Начала» содержат пять постулатов, пять основных геометрических положений, на которых покоится все здание геометрии Евклида. Мы приведем здесь сначала первые четыре; более сложным лятым постулатом, имеющим для нас особенное значение, займемся ниже.

«Нужно потребовать:

I. чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию;

II. чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;

III. чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;

IV. чтобы все прямые углы были равны между собой».

На таких началах строилась вся геометрия. Выше уже приведены высказывания, выражавшие то восхищение совершенствами «Начал» Евклида, которое долго и широко разделялось математиками всего мира. Веками поддерживалась вера в непререкаемые достоинства Евклида по существу содержания, по общей схеме построения «Начал». Геометрия Евклида признавалась самым незыблемым творением научной мысли, и общее впечатление, которое выносил каждый, кто был в состоянии усвоить «Начала», это несомненно подтверждало.

При всем том математики, которые шли дальше, которые подвергали тщательному анализу каждое отдельное предложение, оценивая его не только с точки зрения содержания, но и выдержанности логической концепции,

---

[1] «Euclidis opera omnia». Eddiderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Leipzig; «Начала» занимают первые 5 томов. 1883—1895.

были склонны к критике. Конкурировать с Евклидом, написать новые начала геометрии в течение многих веков не решался никто; но в критике отдельных его установок и рассуждений не было недостатка. Издатели «Начал» обыкновенно сопровождали их многочисленными комментариями, одни из которых имели целью лучше пояснить мысль Евклида, другие же предлагали более простые доказательства, а часто выявляли слабые стороны сочинения, его недостатки.

В чем заключались слабые стороны «Начал», на которые указывали комментаторы? Одни указывали на недостаточность рассуждения Евклида в том или другом случае; эти указания часто были справедливы, но дефекты легко выправлялись. Другие выясняли, что доказательства Евклида не представляют собою строго логического вывода, как этого требовали Платон и Аристотель, хотя они на это и претендуют. Внимательный анализ обнаруживал, что умозаключение часто подменивается интуицией, указаниями наглядных представлений, соображениями, основанными на очевидности, т. е. на ощущениях глаза. Всякий, кто учился геометрии, конечно, припомнит, как часто ему помогал чертеж, помогал своею наглядностью, а не логически установленными признаками. Такого рода соображения, основанные на наглядной очевидности, в рассуждениях Евклида встречаются на каждом шагу, нарушая «цепь логических выводов». «Начала» должны быть признаны пестрой смесью логики и интуиции. Это, впрочем, не вызывало недоверия к справедливости результатов, потому что рассуждения, основанные на наглядности, здесь особенно убедительны и не вызывают сомнений.

Где же коренится источник этой логической невыдержанности? Вне всякого сомнения она коренится в слабости той исходной базы, на которой покоится все построение «Начал». На критике исходных определений, аксиом и постулатов Евклида главным образом сосредоточено внимание комментаторов. Благодаря их анализу стало совершенно ясно, что этот фундамент слаб, что крепкое здание геометрии поддерживается еще другими основаниями, не получившими выражения в аксиоматике Евклида. Отсюда прежде всего возникает стремление эти дефекты исправить, укрепить опорные камни, на которых покоится геометрия, добавить новые. Комментаторы строго критиковали исходные определения Евклида, но очень редко

заменяли их более удачными, более надежными. Комментаторы не без основания исключали одни аксиомы или постулаты (например, постулат IV), иногда не без основания включали другие; но ничего сколько-нибудь существенного они в систему Евклида не внесли. Комментаторы Евклида выявили, что «Начала» Евклида еще очень далеки от той совершенной дедукции, которую ей предписывали, которую требовал Платон. Вера в это совершенство была поколеблена. «Евклидовы начала, — говорит Лобачевский в начале первого своего мемуара по геометрии, — несмотря на глубокую древность их, несмотря на блистательные успехи наши в математике, сохранили до сих пор первобытные свои недостатки. В самом деле, кто не согласится, что никакая математическая наука не должна начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию», и далее: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами: врожденным — верить не должно». Однако к этому твердому убеждению Лобачевского привели не обычные выводы эмпиристов. Он пришел к нему окольным путем, связанным с теми идеями, которые составляли предмет его собственного гениального творчества.

XII. Учение о параллельных линиях от Евклида до Лежандра

«К числу несовершенств (в «Началах» Евклида), — пишет Лобачевский в начале сочинения «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (см. ниже стр. 139), — я отношу важный пробел в теории параллельных линий». Нужно четко уяснить, в чем этот пробел заключается.

Учение о параллельных линиях Евклид строит, так сказать, на двойном базисе. Первым фундаментом этого учения служит 16-е предложение (I_{16}) книги I, т. е. первая теорема о внешнем угле треугольника: *внешний угол треугольника больше каждого из внутренних с ним не смежных углов*. При пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей (рис. 2) образуется 8 углов, которые в парных комбинациях получают раз-

личные названия. Если из внутренних накрест лежащих углов какие-либо два равны между собой, т. е. если

$$c = e \text{ или } d = f, \tag{1}$$

то линии параллельны; в самом деле, если бы эти прямые пересекались, то образовался бы треугольник, в котором один из внешних углов был бы равен внутреннему, с ним не смежному, что противоречит предложению I_{16}. Отсюда

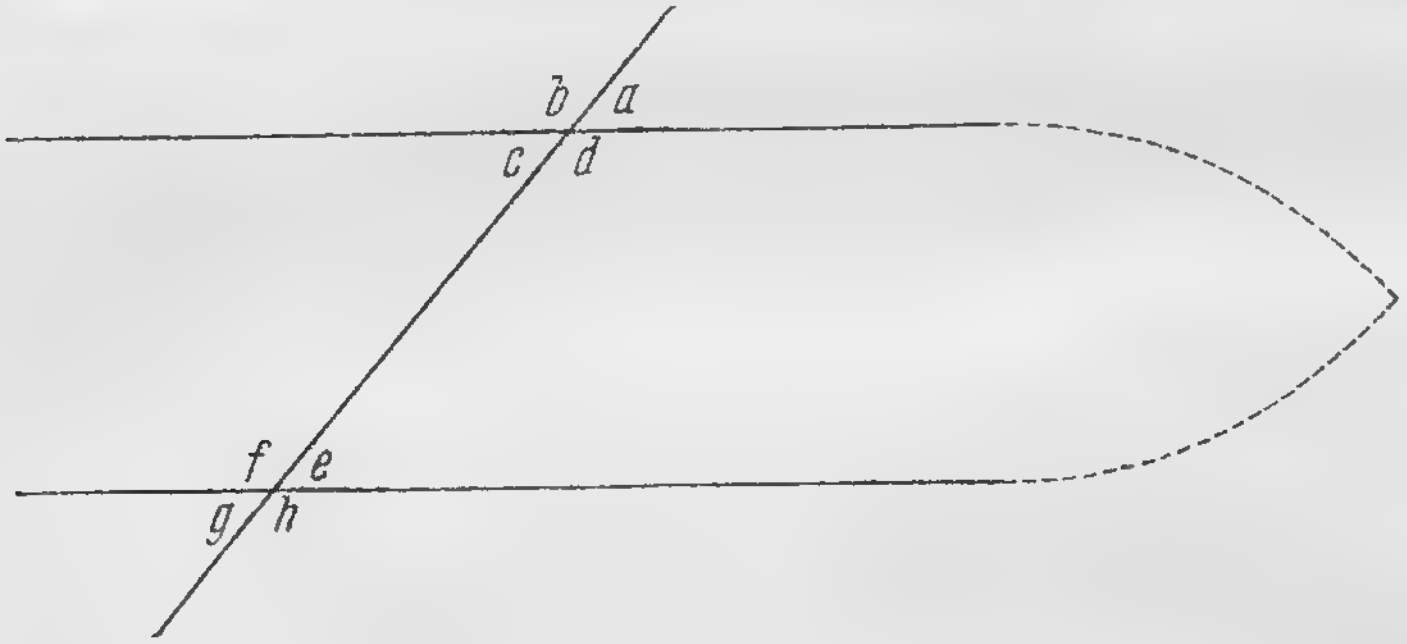


Рис. 2.

следует, что линии параллельны, если равны два внешних накрест лежащих угла, т. е. если имеет место одно из равенств

$$a = g \text{ или } b = h \tag{2}$$

или если равны два соответственных угла

$$a = e, \quad b = f, \quad c = g, \quad d = h, \tag{3}$$

или если какие-либо два внутренних или два внешних односторонних угла составляют вместе $2d$, т. е. если

$$c + f = 2d, \text{ или } d + e = 2d, \text{ или } a + h = 2d, \text{ или } b + g = 2d. \tag{4}$$

Дело в том, что каждое из 12 равенств (1)—(4) влечет за собой все остальные 11. Мы приходим таким образом к теореме, которая вытекает, главным образом, из предложения, связанного с равенством (1):

Теорема. *Если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей имеет место одно из равенств* (1) — (4), *то эти прямые параллельны.*

Эта теорема разбита у Евклида на два предложения I_{27} и I_{28}, которые в совокупности составляют так называемую

прямую теорию параллельных линий; она устанавливает 12 равенств, каждое из которых достаточно для того, чтобы две прямые, расположенные в одной плоскости, были параллельны; она доказывается на основе предыдущих предложений, главным образом на основе теоремы о внешнем угле треугольника I_{16}.

Возникает обратный вопрос: если известно, что две прямые параллельны, то можно ли утверждать, что имеют место равенства (1) — (4)? Можно ли утверждать, что каждое из этих равенств выражает не только достаточное, но и необходимое условие параллельности двух прямых? Справедлива ли теорема, обратная предыдущей?

Мы привыкли к тому, что за доказательством каждой теоремы следует доказательство обратной теоремы, если только она справедлива. Так как и в этом случае справедливость обратной теоремы не вызывала сомнений, то было естественно искать ее доказательство.

История науки знает ряд вопросов, проблем, разрешение которых долгое время составляло камень преткновения математической мысли. Простейшие из этих проблем возникли еще в глубокой древности. Древнейшей из них, по преданию, была так называемая «Делийская задача», требовавшая по указанию оракула удвоения куба, стоявшего на жертвеннике Аполлона; задачу надо понимать так, чтобы циркулем и линейкой построить сторону куба, имеющего по сравнению с данным кубом двойной объем. Столь же неприступными были задачи о трисекции угла и квадратуре круга, т. е. задача о построении теми же средствами угла, составляющего третью часть данного угла, — квадрата, равновеликого данному кругу. К числу таких недоступных задач принадлежало также требование доказать обратную теорему в учении о параллельных линиях, т. е. выполнить это доказательство теми же средствами, которыми доказаны предыдущие 27 предложений в «Началах» Евклида. Не подлежит сомнению, что такое доказательство усердно искали уже до Евклида, и это не удавалось. Подражая Александру Македонскому, Евклид решил разрубить гордиев узел: он принял обратное предложение за постулат, подлежащий в качестве такового приобщению к первым четырем постулатам. Согласно этой установке, каждый приступающий к изучению геометрии должен был признать, что при пересечении двух параллельных линий третьей необходимо должны иметь место

равенства (1) — (4); т. е. собственно принять нужно было только, что при пересечении двух параллельных линий третьей имеет место хотя бы только одно из равенств (1) — (4), так как каждое из них влечет за собою остальные. Евклид принимает, что при пересечении двух параллельных линий третьей имеет место какое-либо одно из равенств (4). Таким образом, Евклид принимает в качестве постулата, что при пересечении двух параллельных прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна $2d$, или — что, очевидно, то же — если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей сумма внутренних односторонних углов не равна двум прямым, то эти прямые не параллельны, они неизбежно пересекаются. Таков дополнительный постулат, который Евклид вводит, которым он пользуется, начиная с 29-го предложения I книги. Чтобы в этом узловом пункте быть вполне точным, нужно остановиться еще на одной детали.

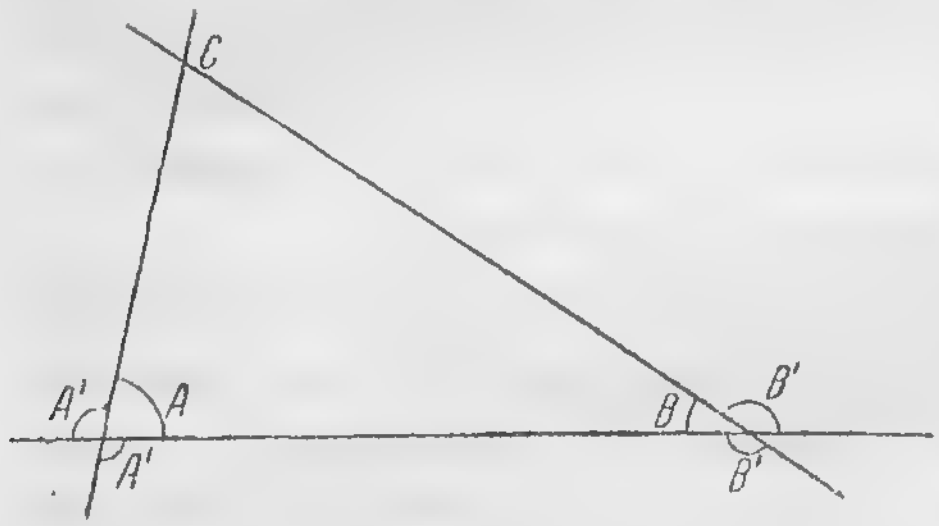


Рис. 3.

Из теоремы о внешнем угле непосредственно вытекает, что сумма двух углов треугольника никогда не может превысить $2d$. Это и составляет содержание следующего предложения I_{17}. В самом деле, если A и B внутренние углы треугольника ABC (рис. 3) при основании AB, A' и B' — соответствующие смежные углы, то сумма четырех углов

$$A + A' + B + B' = 4d. \qquad (5$$

Но так как $A < B'$, $B < A'$ (I_{16}), то на сумму $A + B$ приходится меньше половины суммы всех четырех углов, т. е. $A + B < 2d$. Это можно выразить так: если две прямые AC и BC пересекаются в точке C, то пересечение всегда имеет место с той стороны секущей AB, с которой сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$. Теперь мы можем привести постулат о параллельных точно в той форме, в которой мы его находим в «Началах» Евклида. Это и есть V постулат, которого мы не привели выше (стр. 119) при перечислении первых четырех.

Постулат V. *Если при пересечении двух прямых [лежащих в одной плоскости] третьей сумма внутренних односторонних углов меньше 2d, то эти прямые при достаточном продолжении пересекаются и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше 2d.*

Конечно, дополнения, относящегося к тому, с какой стороны происходит пересечение, Евклид мог бы уже не приводить; это, как мы видели, уже вытекает из предыдущего. Но мы хотели формулировать этот постулат, который так часто называют просто *постулатом Евклида,* так, как это сделано им.

Мы уже упоминали выше, что в различных изданиях «Начал» расхождения чаще всего относятся к постулатам и аксиомам. Некоторые издатели вовсе не отличают постулатов от аксиом, и тогда постулат о параллельных фигурирует у них в качестве XI аксиомы, иногда даже в качестве XII или XIII аксиомы.

Так возник знаменитый постулат, послуживший отправной точкой разветвления геометрии. И таковой он является уже у самого Евклида: мы видели, что 28 первых его предложений доказываются без помощи этого постулата, как обычно говорят, от него не зависят. В дальнейшем есть еще не мало предложений, которые также не зависят от V постулата и доказываются без его помощи. Таковы, например, предложения книги III, отчасти IV, содержащие простейшие свойства окружностей, их хорд и касательных; есть и в стереометрии не мало предложений, не зависящих от постулата о параллельных. Но подавляющее большинство предложений, следующих за I_{28}, доказываются при помощи V постулата или других предложений, уже при его помощи доказанных. Геометрия, таким образом, с этого места разветвляется, распадается на две части: первую часть образуют те предложения, которые от постулата не зависят: их совокупность в настоящее время называют *абсолютной геометрией;* вторую составляют предложения, которые, как уже было ясно Евклиду, без этого постулата доказаны быть не могут; эти последние образуют так называемую *собственно евклидову геометрию.*

Таким образом, постулат о параллельных линиях носит совершенно своеобразный характер: по своему содержанию он сложнее других; для его понимания нужен уже ряд предварительных сведений; он появляется поздно,

после 28-го предложения книги I, тогда как остальные постулаты оказываются необходимыми при доказательстве первых теорем; наконец, этот постулат как бы расщепляет геометрию на две части — на абсолютную и собственно евклидову геометрию.

Вследствие этого своеобразного характера V постулата на нем было особенно сосредоточено внимание комментаторов. Его часто заменяли другим эквивалентным ему постулатом, который казался более простым. Так, английскому математику Плейферу, с которым мы уже встречались выше (стр. 89), приписывают следующую формулировку постулата.

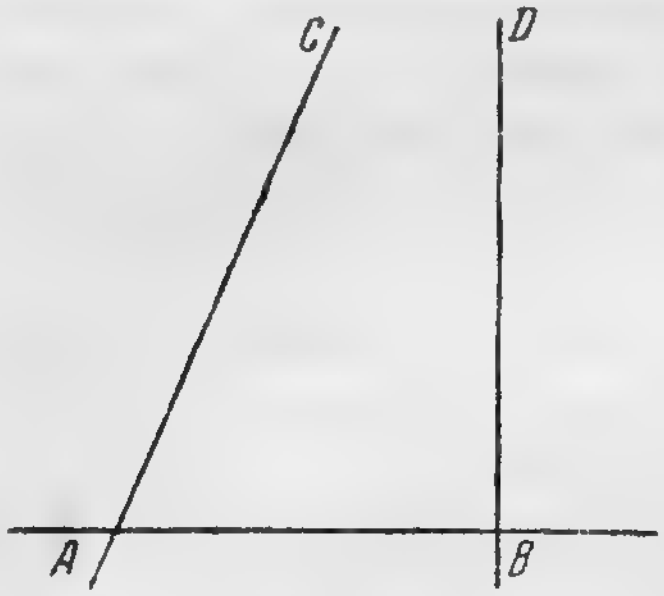


Рис. 4.

Постулат Плейфера. *Через точку C, лежащую вне прямой AB, в плоскости ABC проходит только одна прямая, не встречающая AB.*

Нужно сказать, что эта формулировка встречалась у различных авторов до Плейфера, но мы сохраним установившуюся номенклатуру. Очень распространена также еще следующая формулировка, связываемая с именем Лежандра.

Постулат Лежандра. *Перпендикуляр и наклонная к общей секущей, расположенные в одной плоскости, необходимо встречаются* [конечно, с той стороны секущей, с которой наклонная образует с секущей острый угол (рис. 4)]. В этой форме постулат введен Лежандром в его «Началах»; но и она встречается в различных сочинениях гораздо раньше, например, у Валлиса в XVII в., строго говоря, даже раньше у арабского геометра Насир-Эддина (1201—1274). В этих формулировках постулат можно встретить в различных элементарных учебниках геометрии, и мы не будем останавливаться на доказательстве того, что они эквивалентны постулату Евклида.

Но если наиболее осторожные комментаторы Евклида ограничивались тем, что заменяли постулат Евклида другим, ему эквивалентным, то другие шли дальше. Стремились логически вывести содержащееся в этом постулате утверждение из первых 28 предложений, строго говоря,

следовательно, из остальных аксиом и постулатов Евклида: как обычно говорят, стремились *доказать постулат о параллельных линиях*. Трудно себе представить, сколько усилий было для этого затрачено. Люди ставили себе это задачей жизни, тратили на это многие годы, доходили до мистического агностицизма, а иногда даже до потери рассудка. Вот что писал венгерский профессор В. Больай, друг Гаусса, сыну Иоанну, узнав, что он ищет доказательство постулата о параллельных линиях.

«Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий: ты затратишь на это все свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию параллельных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-либо другим. Я изучил все пути до конца: я не встретил ни одной идеи, которой бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, страшись ее не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни. Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен. Он никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Эта большая и вечная рана в моей душе...»

Не в столь экспансивном, но, по существу, в том же стиле писал в 1817 г. Гаусс: «Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом для человеческого ума».

Правда, среди лиц, которые занимались доказательством V постулата, часто бывали люди, не только лишенные математического образования, но даже не владевшие элементарными сведениями из геометрии. Но в то же время не было выдающегося математика, который не уделил бы внимания и сил этой проблеме: Ампер, Лейбниц, Декарт, Лагранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Якоби — все старались доказать постулат, старались пролить свет на это «темное пятно в теории параллельных линий». Многим казалось, что они достигли цели; этой иллюзии не избежал даже такой крупный геометр, как Лежандр. Но тщательный и спокойный анализ неизменно обнаруживал

несостоятельность рассуждения. Этой участи не избежали и доказательства, отличавшиеся несомненным остроумием.

«Доказательства постулата Евклида, — говорит германский математик и философ Ламберт (J. H. Lambert) середины XVIII в. (см. ниже стр. 279), — могут быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, только одна мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

Уже в XVIII в. молодой германский математик, Клюгель, ученик известного Кестнера (A. Kästner), занимавшего в то время кафедру Евклида в Гёттингенском университете, представил диссертацию о параллельных линиях;[1] он приходит к заключению, что ни одно из доказательств постулата не выдерживает строгой критики. Почти сто лет после этого сочинение, посвященное доказательствам постулата о параллельных линиях, выпустил русский математик В. Я. Буняковский.[2] Читатель, которого это заинтересует, найдет изложение наиболее интересных доказательств в книге Бонола[3] и в вводной статье В. Ф. Кагана к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского, помещенной в I томе полного собрания его сочинений.[4] Здесь мы все же приведем два доказательства, чтобы дать некоторое представление об этих рассуждениях.

Почти все доказательства постулата, как сказано в приведенной выше цитате из Ламберта, грешат тем, что они явно или неявно допускают положение, эквивалентное доказываемому постулату. Это ясно видно на тех примерах, которые мы приведем.

Начнем с доказательства Валлиса. Еще в XVII в. в Оксфордском университете была учреждена кафедра для спорадического чтения лекций по Евклиду. Одним из первых профессоров (professor Sevilianus), занимавших эту кафедру, был Дж. Валлис (J. Wallis, 1616—1703); его

---

[1] G. S. Klügel. Conatuum praecipiorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingen, 1763.

[2] В. Я. Буняковский. Параллельные линии. Напечатано в «Известиях Академии Наук» за 1850 г. и выпущено отдельным изданием.

[3] Р. Бонола. Неевклидова геометрия. Пер. с итальянского. СПб., 1910.

[4] В. Ф. Каган. Учение о параллельных линиях до создания неевклидовой геометрии (Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. 1. М. — Л., 1944).

труды по алгебре и по анализу бесконечно малых хорошо известны; это был один из прямых предшественников Ньютона в деле создания анализа бесконечно малых. В 1663 г., выполняя лежащее на нем обязательство, он прочел лекцию, содержавшую доказательство постулата о параллельных; оно заключается в следующем. Валлис хочет доказать постулат в той форме, которой, как мы уже указали, неправильно присваивается имя Лежандра. Он хочет доказать, что перпендикуляр AB и наклонная CD

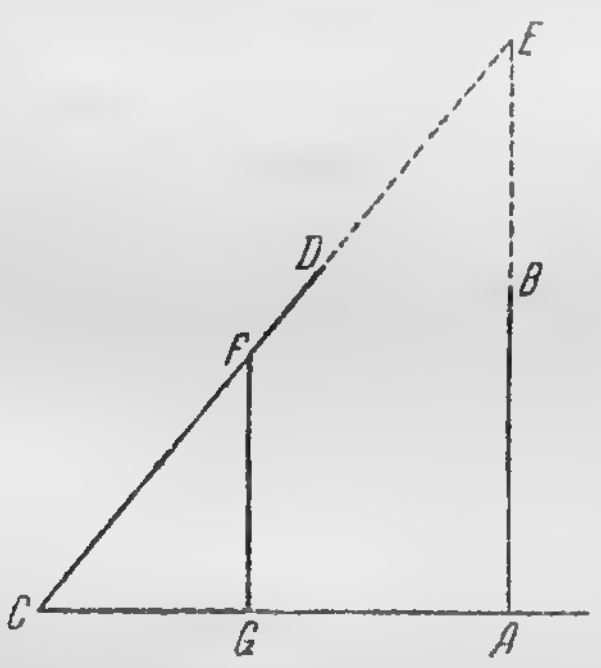


Рис. 5.

Рис. 6.

к секущей AC со стороны острого угла ACD непременно пересекаются (рис. 5). С этой целью он из точки F луча CD опускает на прямую CA перпендикуляр, который упадет в точку G со стороны острого угла. После этого он строит треугольник $C'A'E'$, подобный треугольнику CGF при отношении соответственных сторон, равном $CA : GC$; тогда сторона $C'A'$ будет равна CA и $\angle A'C'E' = \angle ACD$. Если приложим треугольник $A'C'E'$ к прямой AC с надлежащей стороны так, чтобы сторона его $A'C'$ совпала с отрезком AC, то прямые $A'E'$ и $C'E'$ пойдут по AB и CD, и точка E' упадет в точку E, в которой перпендикуляр AB пересечется с наклонной CF (рис. 6).

Рассуждение кажется безукоризненным; но оно предполагает, что каждому треугольнику отвечает подобный ему треугольник при любом отношении подобия. А это допущение не только эквивалентно постулату Евклида, но даже избыточно: достаточно принять, что на плоскости существуют какие-либо два подобных треугольника, и из этого допущения вытечет постулат о параллельных, а с ним вся евклидова геометрия. Между тем задача, как уже указа-

но, заключается отнюдь не в том, чтобы заменить постулат о параллельных более простым (постулат Валлиса не является более простым), а в том, чтобы «доказать постулат», не пользуясь никаким добавочным допущением.

Минуем полтораста лет и обратимся к рассуждениям Лежандра. К размышлениям о теории параллельных линий Лежандра привело составление учебника геометрии, о котором нам уже пришлось говорить выше (стр. 94), новых «Начал», которые впервые заменили книгу Евклида во многих школах. Точкой отправления Лежандра служит учение о сумме углов треугольника. Теорема о том, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, всегда устанавливается средствами собственно евклидовой геометрии: доказательство основано на том, что при пересечении двух параллельных линий третьей соответственные и внутренние накрест лежащие углы равны, т. е. на основном предложении собственно евклидовой геометрии. Лежандр, не пользуясь постулатом о параллельных линиях, т. е. средствами абсолютной геометрии, доказал, следующие три предложения.

1. *Сумма углов треугольника не может превышать двух прямых.* Из этого предложения следует, что сумма углов треугольника либо равна $2d$, либо меньше $2d$. Следующее предложение уточняет эту дизъюнкцию.

2. *Если сумма углов равна $2d$ в каком-либо одном треугольнике, то она равна $2d$ во всяком другом треугольнике.*

Таким образом, средствами абсолютной геометрии установлено, что сумма внутренних углов во всех треугольниках либо равна $2d$, либо же меньше $2d$.

3. *Если сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, то имеет место постулат о параллельных,* а следовательно вся геометрия Евклида.

Таким образом, постулат Евклида эквивалентен допущению, что сумма углов треугольника равна $2d$. Доказательства этих теорем читатель найдет частично в «Началах» Лежандра (издания III—VIII), полностью — в указанных выше книге Бонола и в статье В. Ф. Кагана.

Из теорем Лежандра, таким образом, следует, что для доказательства постулата о параллельных достаточно установить средствами абсолютной геометрии, что сумма углов треугольника равна $2d$. Предложенное им доказательство мы здесь воспроизводим полностью. Продолжим стороны AB и AC треугольника ABC и приложим

его к стороне BC, повернув его другой стороной именно так, чтобы вершина B упала в точку C, а вершина C в точку B. Треугольник займет положение DCB. При этом $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle DCB = \angle ABC$. А так как $\angle KBC$, как внешний угол треугольника ABC, больше $\angle ACB$, то $\angle CBD < CBK$; сторона BD передвинутого треугольника расположится внутри угла CBK. Таким же образом сторона CD расположится внутри угла BCE; треугольник займет положение DCB, указанное на чертеже. Теперь *через точку D проведем прямую EF так, чтобы она пересекала стороны угла KAE в точках E и F.* Мы придем к треугольнику AEF, который расположен внутри угла KAE и распадается на четыре треугольника, два из которых ABC и BDC не отличаются от данного, два других же от них вообще отличны (рис. 7).

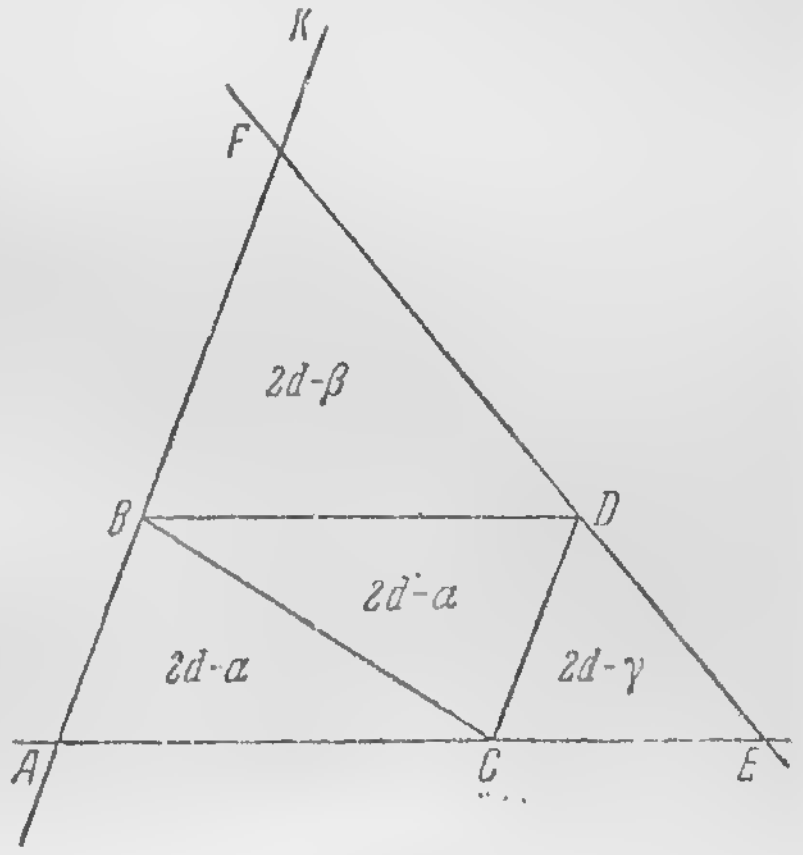


Рис. 7

Теперь Лежандр становится на путь доказательства от противного. Он допускает, что сумма углов треугольника ABC, меньше $2d$, равна, скажем, $2d-\alpha$, где α имеет положительное значение; ту же сумму имеют внутренние углы треугольника BCD. В каждом из треугольников BFD и CED, согласно теореме 2, сумма углов также меньше $2d$, составляя, скажем, $2d-\beta$ в треугольнике BDF и $2d-\gamma$ в треугольнике CDE. Сумма внутренних углов во всех четырех треугольниках составляет поэтому $8d-2\alpha-\beta-\gamma$. Если от этой суммы отбросить углы при точках B, C, D, т. е. $6d$, то получим сумму внутренних углов треугольника AEF; она равна

$$2d-2\alpha-\beta-\gamma<2d-2\alpha. \qquad (6)$$

Результат, к которому мы таким образом пришли, сводится к следующему. *Если существует треугольник, в котором сумма углов равна $2d-a$, то существует также*

треугольник, в котором сумма углов меньше $2d - 2\alpha$. Но, повторив то же построение, мы придем к треугольнику, в котором сумма углов меньше $2d - 4\alpha$, далее к треугольникам, в которых сумма углов меньше $2d - 8\alpha$, меньше $2d - 16\alpha$ и т. д. Мы неизбежно придем к треугольнику, в котором сумма углов имеет отрицательное значение, что лишено смысла. Сделанное предположение поэтому неправильно; *сумма внутренних углов треугольника равна* $2d$.

Это доказательство Лежандр излагал в своих «Началах» с третьего по восьмое издание. Ему, конечно, нельзя отказать в исключительном остроумии; но оно все же страдает существенным недостатком, лишающим его доказательной силы. Оно предполагает, что *через точку D, лежащую внутри угла KAE, всегда можно провести прямую EF, встречающую* обе стороны угла. Это есть допущение, эквивалентное постулату Евклида. И Лежандр, очевидно, сознавал, что в этом есть дефект. Это видно из следующего подстрочного примечания, помещенного в третьем издании. «Мы предположили, что A есть самый меньший из углов треугольника ABC и, следовательно, не превышает двух третей прямого угла; этим мы имеем в виду сделать более ощутительным, что прямая, проведенная через точку D, может одновременно встретить продолжения сторон AB и AC». Совершенно ясно, что эта деталь ничего не меняет; это и было очень скоро обнаружено. Лежандр сохранил это доказательство, как уже сказано, с третьего по восьмое издание своих «Начал». В дальнейших изданиях «Начал», с девятого по одиннадцатое, он возвратился к схеме Евклида. В двенадцатом и тринадцатом изданиях появляется другая модификация того же доказательства. Лежандр этим не ограничился; он строил доказательство постулата и из совершенно другого принципа, известного под названием «начала однородности». Такое доказательство изложено им в приложении к третьему изданию «Начал». Об этом принципе мы будем говорить ниже; ограничимся замечанием, что это доказательство не более убедительно, чем предыдущее.

В последние годы своей жизни (1833) Лежандр опубликовал в «Мемуарах Парижской Академии наук» обширное исследование, носящее своеобразное название «Размышления о различных способах доказательства теории параллельных линий или теоремы о сумме углов тре-

угольника».[1] Это именно размышления, к выводам из которых сам автор относится с большой осторожностью; он не делает уверенных утверждений, он собрал здесь, по выражению Лобачевского, «все, что, по его мнению, казалось наиболее удовлетворительным».[2]

Мемуар Лежандра завершил эпоху в истории поисков доказательств постулата о параллельных линиях. В то время, когда он опубликовал свой заключительный мемуар, вопрос был полностью уже разрешен. Лобачевский за четыре года до того опубликовал уже свой основной мемуар «О началах геометрии», в котором весь вопрос получил исчерпывающее решение.

XIII. «Exposition succincte» и «Geometrische Untersuchungen» (Начала неевклидовой геометрии)

Читая начинающим студентам курс элементарной математики, в частности, геометрии, Лобачевский заинтересовался теорией параллельных линий. Он не избежал общей участи тех, кто занимался этим вопросом, он попытался доказать V постулат. Сохранилась запись одного из его слушателей (М. Темникова), содержащая доказательство, которое Лобачевский излагал на своих лекциях. Доказательство не лишено, конечно, остроумия; но оно основано на неправильности чертежа, которую Лобачевский скоро обнаружил; мы его не воспроизводим.[3] Курс этот Лобачевский читал в 1815 г. и, следовательно, тогда он не имел еще определенной точки зрения на этот вопрос. Ближайшие годы были, очевидно, годами настойчивого размышления об этом предмете. «Геометрия», представленная Лобачевским к напечатанию в 1823 г., свидетельствует о том, в какой стадии находились в ту пору его взгляды на этот вопрос.

Во-первых, совершенно ясно, что Лобачевский отдавал себе полный отчет в том расщеплении геометрии, которое производит постулат о параллельных линиях. Более того,

---

[1] A. M. Legendre. Réflexions sur les differentes manières de démonstrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.

[2] Н. И. Лобачевский. Воображаемая геометрия. Вступление.

[3] Оно изложено в предисловии к изданию «Геометрии», выпущенному Казанским физико-математическим обществом (см. стр. 86). В этом предисловии приводятся три доказательства постулата, но из них только первое действительно принадлежит Лобачевскому.

в свете этого становится понятным то странное распределение материала, которое вызывало такое недоумение у Фусса: Лобачевский в первых пяти главах отобрал тот материал, который не зависит от постулата о параллельных, который принадлежит абсолютной геометрии. «Геометрия» Лобачевского — это первое сочинение, в котором абсолютная геометрия полностью выделена, и этим объясняется фузионизм, отнюдь не преследующий здесь педагогических целей; он имеет в виду отделить, изложить в первую очередь не только планиметрические, но и стереометрические предложения, которые доказываются без помощи V постулата. Фусс был от этого чрезвычайно далек и совершенно естественно, что расположение материала вызвало у него полное недоумение. Твердо стоя на своей метрической точке зрения, Лобачевский отдает себе ясный отчет в том, что измерение отрезков и градусное измерение углов от постулата не зависит, а измерение площадей, прежде всего прямолинейных фигур, коренным образом зависит от постулата. Вот почему, обращаясь к измерению прямоугольников, он начинает посвященную этому VI главу следующим образом:

«Измерение плоскостей основывается на том, что две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикул, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикулу. Линии *AB* и *CD* [см. рис. 5] должны сходиться по достаточном продолжении, есть ли одна из них *AB* перпендикулярна к *BC*, а другая *CD* наклонена к *BC* под острым углом *C*, обращенным к перпендикулу *AB*. Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами» (см. факсимиле на стр. 85).

Лобачевский принимает таким образом постулат в лежандровой формулировке и дает себе ясный отчет в том, что ни одно из предложенных доказательств его не может быть признано убедительным. В качестве лучшего из этих неудовлетворительных доказательств [1] он приводит

[1] Читатель найдет это доказательство в указанных выше (стр. 128) сочинениях. Оригинальное доказательство помещено в сочинении L. B e r t r a n d. Developpement nouveau de la partie élémentaire des mathematiques. Gênève, 1778. Более доступно второе издание этой книги, вышедшей под названием Elements de géometrie. Paris, 1812.

очень известное, несомненно остроумное доказательство Л. Бертрана, которое основано на неправильном использовании бесконечно малых и бесконечно больших величин».

Итак, в «Геометрии», в этой книге Лобачевского, которая не была разрешена к печати, от которой были склонны отказаться даже некоторые авторы текущего столетия, впервые абсолютная геометрия была четко отделена от собственно евклидовой. Оставалось только обнаружить, что межа, проходящая между пятой и шестой главой «Геометрии», производит не механическое разделение гео-

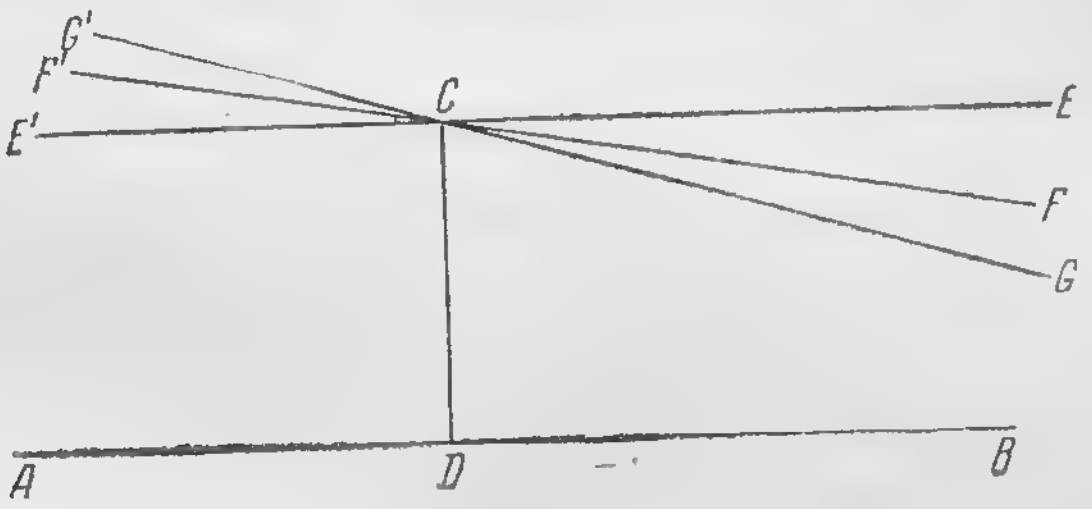


Рис. 8

метрии на две части, что она служит точкой разветвления, что от нее разрастается новая геометрия в бесчисленных разновидностях, среди которых простейшей является собственно евклидова геометрия. Это было Лобачевским выполнено в следующие три года.

Путь, которым Лобачевский к этому пришел, заключался в следующем. Он проштудировал рассуждения Лежандра, о которых упоминает во всех своих сочинениях, и, подобно Лежандру, повидимому, сначала пытался доказать постулат от противного. Самый постулат о параллельных он брал при этом в Плейферовой форме. Соответственно этому для доказательства от противного Лобачевский, сохраняя остальные аксиомы и постулаты Евклида, вместо постулата о параллельных, принимал, что через точку C, лежащую вне прямой AB (рис. 8), в плоскости ABC проходит больше одной прямой, не встречающей AB (прямые CE, CF, CG); можно было ожидать, что выводы из такого, на первый взгляд совершенно нелепого, допущения приведут к абсурду, к противоречию с абсолютной геометрией. Но тонкие выводы, которые Лобачевский мастерски проводил, к такому противоречию

не приводили. Правда, его выводы приводили к разительному противоречию с интуицией, с указаниями глаза; но не было никакого противоречия логического, не было противоречия с тем, что было доказано раньше. Напротив, выводы, последовательно проводимые, постепенно складывались в законченное гармоническое целое, которое Лобачевский назвал «воображаемой», Гаусс — «неевклидовой» геометрией, а мы теперь называем *геометрией Лобачевского*.

Как уже было указано выше, 11 (23) февраля 1826 г. Лобачевский сделал в заседании Физико-математического факультета (отделения, как тогда чаще говорили) доклад, оформленный в то же время к печати под названием «Exposition succincte des principes ee la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles». (Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях.) В январе 1926 г., когда готовилось празднование столетнего юбилея открытия неевклидовой геометрии, профессором Н. И. Порфирьевым в архиве Казанского университета была найдена препроводительная бумага, с которой эта работа была представлена в факультет. Приведем ее содержание полностью.

«Препровождаю сочинение мое под названием: Exposition succincte des principes de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.

Желаю знать мнение о сем ученых, моих сотоварищей и естьли оно будет выгодно, то прошу покорнейше представленное мною сочинение принять в составление ученых записок Физико-математического отделения, в каком намерении я и предпочел писать на французском языке, так как предполагалось записки издавать на сем языке, сделавшемся ныне общим между учеными.

Проф. Н. И. Лобачевский».

На этой бумаге вверху имеется отметка: «Получено 7-го февраля 1826 г.», а внизу написано: «слушано 11 февраля ст. I. Определено: Поручить рассмотреть сочинение гг. профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить отделению».

Главную роль в этой комиссии несомненно должен был

Получ. 7 февраля 1826 года

М. Н. П.

Департамент народного Просвещения

ИМПЕРАТОРСКОГО Казанского Университета

От профессора Лобачевского

Препровождает сочинение

Казань 1826 февраля 6

В Отделение физико-математических наук

Препровождаю сочинение мое под названием: Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles. Желаю знать мнение о сем ученых моего искусства и, ежели оно будет выгодно, покорнейше прошу представленное мною сочинение принять в составление ученых записок физико-математического отделения, в каком намерении я и предпочел писать на французском языке, так как предполагают записки издавать на сем языке единственно для общего сведения ученых.

Профессор Н. Лобачевский

Секретарь Отделения Кнорр

Таковое сочинение [illegible] Адъюнкту [illegible]

[illegible] 1826 года [illegible]

Адъюнкт Брашман

Слушано 11 февраля 1826 года ст. 1.

Определено: поручить рассмотреть сочинение Гг. профессорам Симонову, Купферу и Адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить Отделению.

Факсимиле представления Н. И. Лобачевским сочинения „Exposition Succincte"

играть И. М. Симонов — астроном и математик. А. Я. Купфер (впоследствии академик) в то время занимал в Казанском университете кафедру химии, временно также физики. Н. Д. Брашман с марта 1825 г. состоял адъюнктом по кафедре математики; это был очень даровитый человек; позже он был приглашен профессором в Московский университет; во второй половине прошлого века он пользовался большим уважением в русских математических кругах.[1] Нужно, однако, сказать, что Симонов был вообще человеком недоброжелательным, и к Лобачевскому, как увидим, относился очень сдержанно; от абстрактных вопросов математики он был далек. Еще более далек от них, конечно, был Купфер. Вопросы обоснования геометрии, к которым относилось исследование Лобачевского, были чужды всем трем членам комиссии. В работе Лобачевского они не разобрались. Может быть, это им и было очень трудно сделать, хотя тут же был живой автор, от которого можно было бы получить разъяснения. Но комиссия поступила иначе. Она отнеслась к работе Лобачевского отрицательно, но решила «пощадить» товарища. Она не дала о работе никакого заключения и не возвратила рукописи в факультет. Во всяком случае в последующих протоколах отделения никакого упоминания о ней нет; все старания разыскать ее в архивах к цели не привели: она считается безвозвратно утерянной. Лобачевскому и на этот раз не удалось опубликовать свою работу.

При всем том мы имеем возможность довольно точно воспроизвести ее содержание. Через три года, в 1829 г., Лобачевский все же опубликовал в журнале «Казанский вестник», который рассматривался как орган университета, мемуар, носивший название «О началах геометрии». Примерно первая треть этой работы, как Лобачевский сам указывает, «извлечена самим сочинителем из рассуждения «Exposition succincte», читанного в заседании отделения 12 февраля 1826 г.».[2]

Эта часть после некоторых вступительных рассуждений, о которых мы будем иметь случай говорить ниже, содержит изложение начал новой созданной Лобачевским

---

[1] Более подробные сведения об этих лицах см. Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета, т. I—II, К., 1904.

[2] Лобачевский ошибся, доклад состоялся 11, а не 12 февраля.

неевклидовой геометрии и заканчивается уравнениями, которые в новой геометрии связывают стороны и углы прямолинейного треугольника; все остальное добавлено позже. Этим в общих чертах устанавливается содержание работы «Exposition succincte». «Заглавие представленной Лобачевским рукописи («Exposition succincte»), как правильно замечает А. П. Котельников во вступительной статье к мемуару «О началах геометрии»,[1] возбуждает некоторое недоумение. Не совсем ясно, что подразумевал Лобачевский под словами «démonstration rigoureuse du théorème des parallèles» (строгое доказательство теоремы о параллельных линиях). Во всяком случае, поскольку в ней содержались уже начала новой неевклидовой геометрии, не может подлежать сомнению, что речь не идет о новой попытке дать доказательство постулата о параллельных линиях, а о новой строгой постановке всего учения о параллельных линиях.

Ни мемуар «О началах геометрии», ни последовавшие за ним сочинения Лобачевского никем у нас поняты не были. Он решил поэтому составить небольшое сочинение, которое содержало бы только начала открытой им новой геометрии, но были бы изложены в более доступной форме. Это и было им выполнено в 1840 г. Такое сочинение было им опубликовано в Берлине на немецком языке в виде отдельной брошюры под заглавием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien».[2] (Геометрические исследования по теории параллельных линий). Собственно это единственное сочинение, составленное Лобачевским так, что при некотором напряжении человек, владеющий общим математическим образованием и склонный вдумчиво отнестись к прочитанному, может вполне овладеть новыми идеями созданной им геометрии. Это один из лучших перлов мировой математической литературы. Именно по этому сочинению, правда на четверть века позже, с идеями Лобачевского познакомился математический мир (см. главу XXIII). «Геометрические исследования» заканчиваются теми же уравнениями, которыми, по указанию Лобачевского, заканчивалось рассуждение «Exposition succincte». Не может подлежать сомнению, что эта книга содержит тот же материал, который Лобачевский изложил в знаменательный день 11 (23) февраля 1926 г. и письменно в

---

[1] В т. I Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского.
[2] Berlin, Finke, 1840.

Geometrische Untersuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

Nicolaus Lobatschewsky,

Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan.

Berlin. 1840.

In der G. Fincke'schen Buchhandlung

Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследований по теории параллельных линий».

«Exposition succincte», может быть, только в несущественной модификации. Мы постараемся поэтому в кратком очерке изложить содержание этого сочинения и тем попытаемся ввести читателя в круг идей Лобачевского. Конечно, для основательного их усвоения нужно изучить либо подлинные сочинения Лобачевского (в этом случае тоже лучше всего начать с «Геометрических исследований»), либо те или иные позднейшие сочинения, посвященные этому предмету; список их указан в приложении к настоящему сочинению. Настоящий очерк претендует только на то, чтобы дать читателю этой книги общее представление

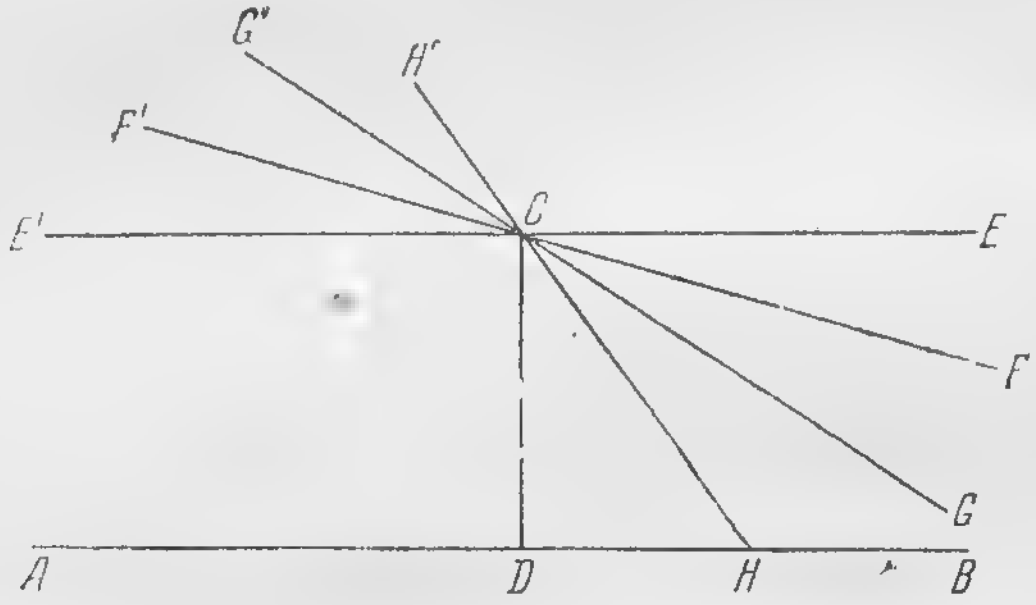


Рис. 9.

об этих замечательных идеях, не лишить его здесь некоторого фактического знакомства с творчеством Лобачевского.

Сочинение «Геометрические исследования» Лобачевский после краткого введения начинает перечислением 15 важнейших положений абсолютной геометрии, которыми ему необходимо пользоваться в дальнейшем изложении. Одни из этих положений представляют собой постулаты, другие — теоремы, во всяком случае все это — предложения (в широком смысле этого слова), которыми мы неизбежно пользуемся при построении абсолютной геометрии. Вслед за этим Лобачевский становится на путь, который приводит его к неевклидовой геометрии.

Обратимся к чертежу, которым мы уже собственно пользовались выше. Из точки C (рис. 9) опустим на прямую AB перпендикуляр CD, а к нему в той же плоскости через точку C проведем еще перпендикуляр $E'CE$ (прямую часто будем обозначать тремя буквами, чтобы от-

метить два луча, из которых она состоит: CE и CE'). Допущение, которое делает Лобачевский в дополнение к абсолютной геометрии в соответствии с его установкой, заключается в том, что в той же плоскости ACB через точку C, кроме $E'CE$ (евклидовой параллели), проходит еще по крайней мере одна прямая $G'CG$, также не встречающая прямой AB. Отсюда ясно, что при таком допущении всякая прямая $F'CF$, проходящая через точку C между прямыми $E'CE$ и $G'CG$ (т. е. внутри вертикальных углов ECG и $E'CG'$), также не встречает AB. Допущение приводит, таким образом, к тому, что через точку C в той

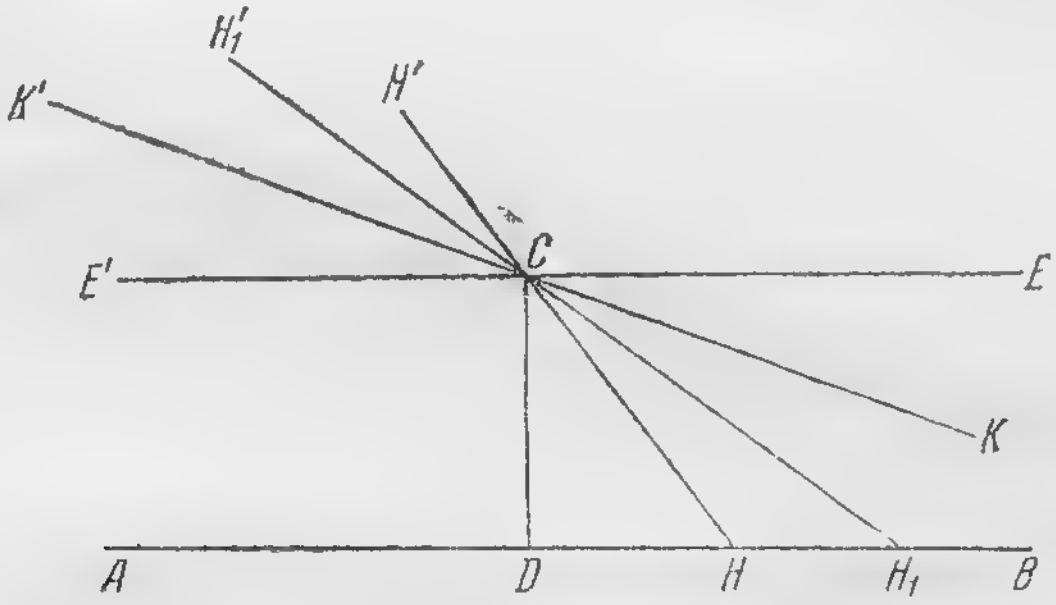


Рис. 10.

же плоскости проходит бесчисленное множество прямых, не встречающих прямой AB. Если остановимся на прямых, проходящих в первом квадранте (т. е. в прямом угле DCE), то они таким образом разбиваются на прямые вида $H'CH$, встречающие прямую AB, и на прямые вида $F'CF$, ее не встречающие; первые (в квадранте I) расположены ближе к перпендикуляру CD, вторые ближе к CE. В виду непрерывности пучка отсюда следует, что в этих квадрантах должна существовать прямая, отделяющая прямые одной категории от прямых второй категории. Однако (рис. 10) последней встречающей прямой в этом пучке быть не может. В самом деле, какова бы ни была пересекающая прямая $H'CH$, взяв точку H_1 за точкой H, получим прямую H'_1CH_1, лежащую за $H'CH$ и все еще встречающую AB. Поэтому граничная прямая $K'CK$ будет первой прямой, не встречающей AB. Так как в IV квадранте естественно будет происходить то же, что и в I, то вся картина представится в таком виде, как это отчетливо изображено на рис. 11: здесь черным изображены

«старые» прямые, встречающие прямую AB, красным — «новые» прямые, не встречающие AB; синим изображены две прямые, отделяющие прямые встречающие от не встречающих. Эти две прямые Лобачевский называет *параллельными AB*. Таким образом, термин *прямая CK параллельна прямой AB* имеет у Лобачевского более узкое значение, чем в геометрии Евклида: он означает, что прямая CK не только не встречает прямой AB, но в точке C с той или другой стороны

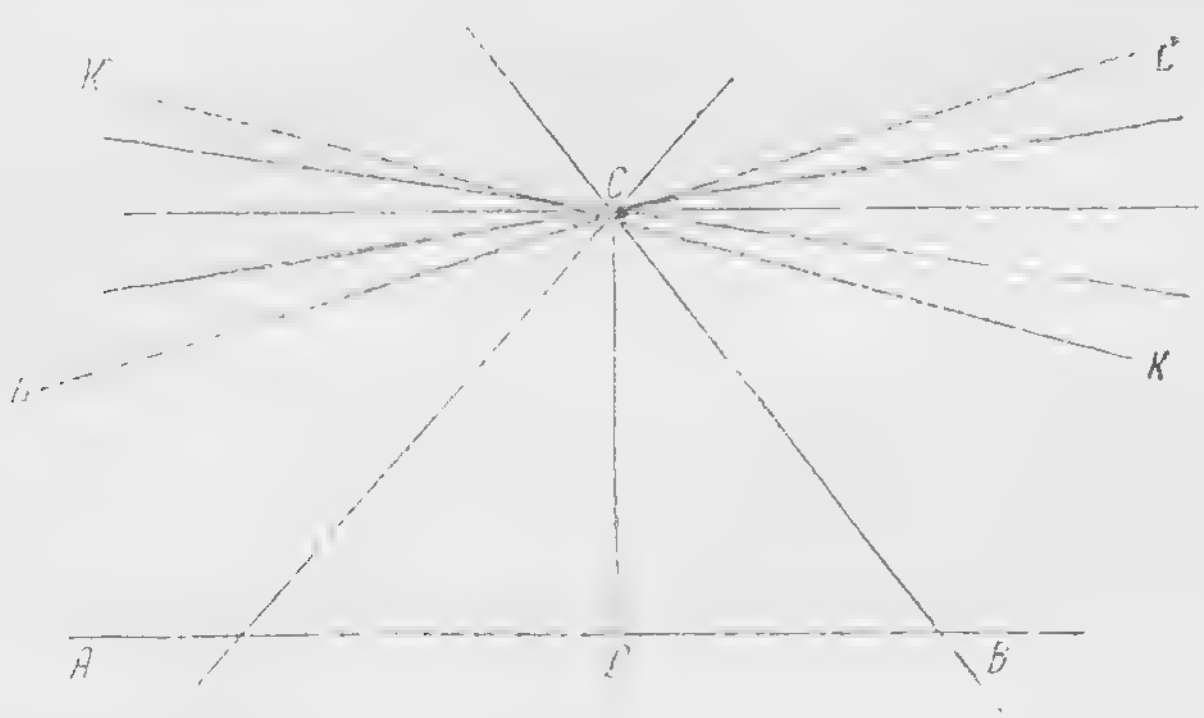


Рис. 11.

отделяет прямые, встречающие прямую AB от не встречающих ее; это наши синие прямые; красные не называются параллельными AB. Воображая себе плоскость, в которой осуществляются допущения Лобачевского, мы будем называть ее *плоскостью Лобачевского*; в таком же смысле будем говорить о пространстве Лобачевского. Вместе с тем мы можем сказать, что *в плоскости Лобачевского через точку C, лежащую вне прямой AB, проходят две параллельные ей прямые* (на рис. 11 $K'CK$ и $L'CL$). Они образуют две пары вертикальных углов; прямые, проходящие внутри вертикальных углов KCL и $K'CL'$, встречают AB, по терминологии Лобачевского, *сходятся с AB*, прямые же, проходящие внутри углов $K'CL$ и KCL', по терминологии Лобачевского, *расходятся* с AB. Если имеем две прямые AB и CH, то вторая, выходя из любой своей точки C, либо сходится с AB либо параллельна ей, либо расходится с ней. При этом, если прямая

CG в какой-либо своей точке C сходится с AB (т. е., выходя из этой точки, сходится с AB), параллельна ей или расходится с ней, то те же функции, если можно так выразиться, она выполняет и во всякой другой своей точке C'. Подробнее это значит: если какая-либо прямая CG (рис. 12) в точке C расходится с AB, то и в другой своей точке C' она с ней расходится; если в точке C она ей параллельна, то и во всякой другой своей точке C' она ей параллельна. Это утверждение, ко-

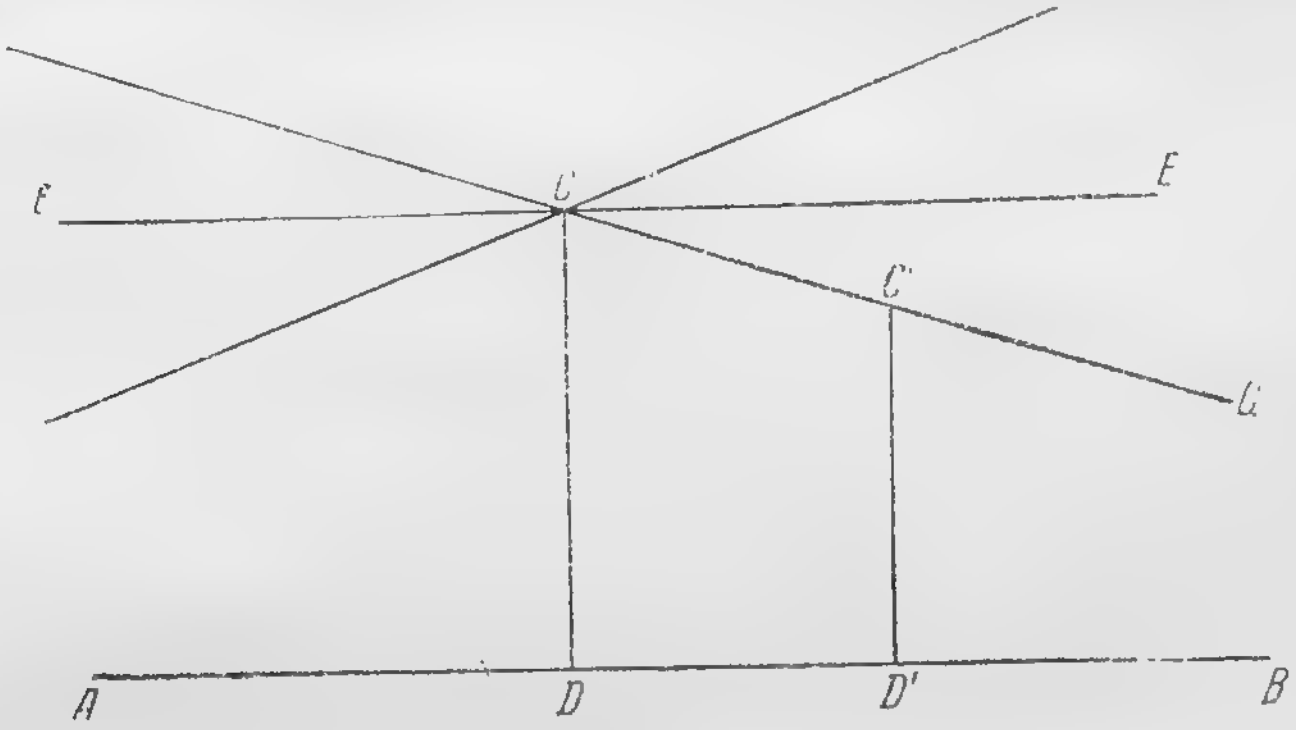


Рис. 12.

нечно, требует обоснования, которого мы не можем здесь привести; но оно выполняется безукоризненно. Мы получаем, таким образом, возможность говорить просто: *прямая CG сходится с AB, параллельна ей, расходится с AB* (не относя параллелизма или расхождения к определенной точке C этой прямой). И это поведение одной прямой относительно другой всегда взаимное. Ясно, что *«евклидова параллель» CE теперь принадлежит к числу прямых, расходящихся с AB.*

Необходимо отметить еще один важный момент. Относительно параллели CK (рис. 13), образующей с перпендикуляром CD острый угол DCK со стороны DB, говорят, что она параллельна AB в сторону AB, тогда как вторая параллель CL ей параллельна в сторону BA. При таком понимании параллелизма сохраняется основное свойство параллелей в евклидовой геометрии: две прямые, *параллельные третьей в одну и ту же сторону, параллельны между собой в ту же сторону*. В геометрии Евклида обе

параллели к прямой сливаются в одну; вертикальные углы KCL и $K'CL'$ развертываются каждый в два прямых, смежные же с ними углы $K'CL$ и KCL' свертываются, сходят на-нет, обращаются в нуль.

Каждый из равных острых углов DCK и DCL (рис. 13), которые параллели с двух сторон образуют с перпендикуляром CD, Лобачевский называет *углом параллельности в точке C относительно прямой AB*. Евклидова геометрия выделяется тем, что в ней угол параллельности всегда есть прямой угол. Если, следовательно, допущено суще-

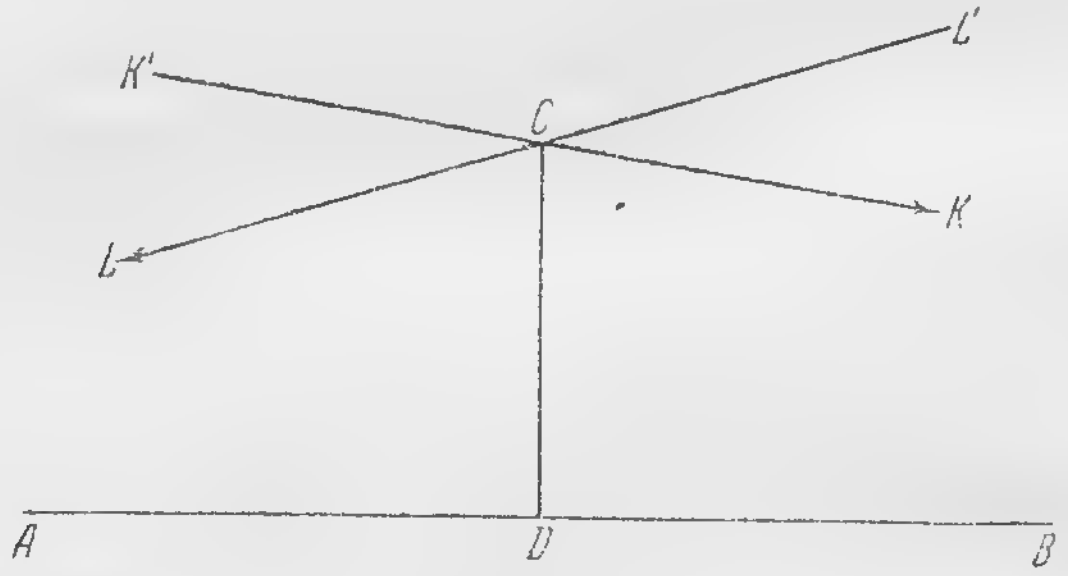


Рис. 13.

ствование геометрии Лобачевского, т. е. геометрии, в которой имеют место исходные его постулаты, то геометрия Евклида составит частный ее случай, соответствующий тому, что угол параллельности имеет постоянное значение и всегда равен прямому углу. Становясь на почву воображаемой, неевклидовой геометрии, Лобачевский с безукоризненной строгостью доказывает, что две параллельные между собой прямые здесь неограниченно (асимптотически) приближаются одна к другой в сторону параллелизма (рис. 14), как бы сходятся где-то в бесконечно удаленной точке; в противоположную же сторону они друг от друга неограниченно удаляются. Две же расходящиеся прямые всегда имеют общий перпендикуляр, который представляет собой кратчайшее расстояние между ними, от которого они расходятся, неограниченно одна от другой удаляясь в обе стороны (рис. 15). Этот результат, выраставший на первых шагах изучения неевклидовой геометрии, долго служил для многих непреодолимым препятствием к усвоению и признанию неевклидовой гео-

метрии. Но справедливы слова Гаусса: «Мы не можем смешивать того, что нам кажется неестественным с абсолютно невозможным».

Рис. 14.

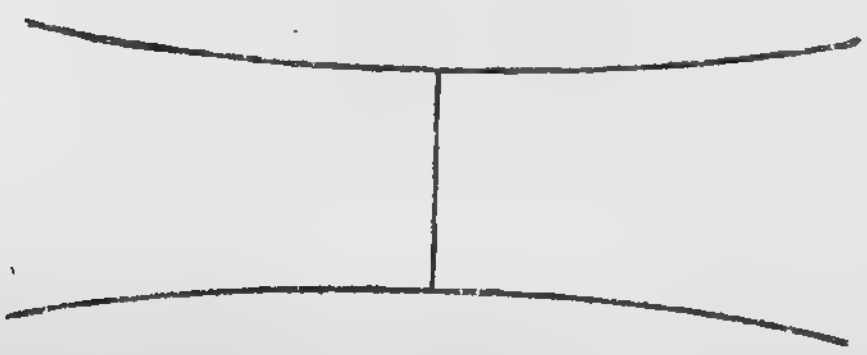


Рис. 15.

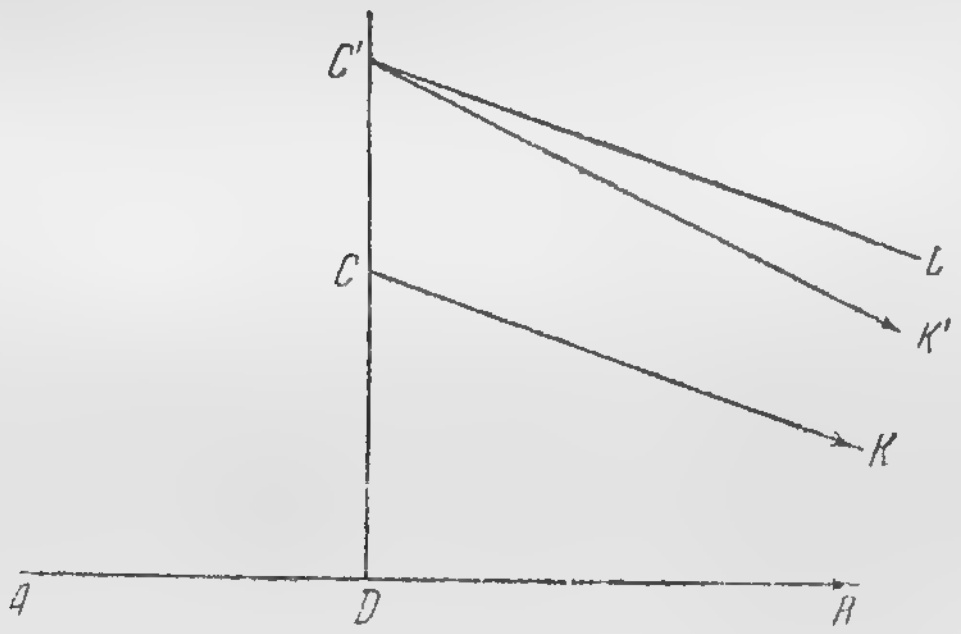


Рис. 16.

Теперь возвратимся к углу параллельности. В неевклидовой геометрии это всегда острый угол и притом угол переменный. Пусть, как прежде (рис. 16), $CD \perp AB$, $CK \parallel AB$, KCD есть угол параллельности в точке C относительно прямой AB. Возьмем точку C' на том же пер-

пендикуляре CD выше точки C. Если проведем прямую $C'L$ под тем же углом к перпендикуляру, что и CK ($\angle DC'L = \angle DCK$), то прямые CK и $C'L$, как евклидовы параллели, расходятся. Прямая $C'K'$, параллельная CK и AB в ту же сторону, должна быть ближе к перпендикуляру, чем $C'L$, т. е. угол параллельности в точке C' меньше, чем в точке C ($\angle K'C'D < KCD$). Угол параллельности в точке C относительно прямой AB, таким образом, зависит от расстояния точки C от AB и представляет собой функцию этого расстояния. Если обозначим это расстояние CD через x, то угол параллельности в точке C есть функция от x. Лобачевский обозначил ее через $\Pi(x)$. Предыдущие соображения обнаруживают также, что эта функция убывает с возрастанием x. Так как $\Pi(x)$ есть острый угол, то отсюда следует, что с убыванием x угол DCK приближается к прямому углу. Лобачевский показывает, что он приближается к прямому углу неограниченно; это значит, сколь бы ни был мал угол α, значение $\Pi(x)$ отличается от прямого угла меньше чем на α, когда x становится достаточно малым. Лобачевский в следующей работе делает отсюда далеко идущие конкретные выводы; мы к ним придем ниже (гл. XV). Для выяснения развития, которое Лобачевский дал своей геометрии, необходимо остановиться еще на двух моментах.

Представим себе окружность и совокупность, как говорят обыкновенно, «пучок», прямых, проходящих через ее центр. Окружность пересекает все прямые этого пучка ортогонально, т. е. под прямым углом. Можно это представить так: если наблюдатель двигается по окружности, то направление его движения все время обращено перпендикулярно к радиусу, его путь пересекает ортогонально все радиусы; геометр дает этому такое выражение: окружность есть ортогональная траектория пучка прямых, проходящих через одну точку — через центр этой окружности, через центр пучка. Это происходит одинаково в евклидовой и в неевклидовой плоскости. Представим себе теперь, что центр пучка удаляется по одной из прямых пучка; тогда прямые, составляющие пучок, как бы приближаются к параллелизму. Если заменим пучок прямых, пересекающихся в общей точке, пучком параллелей, то в евклидовой плоскости их ортогональными траекториями будут служить прямые (рис. 17); расстояние между дву-

мя параллелями, отсчитываемое по траектории, на всем протяжении одно и то же. В плоскости Лобачевского дело обстоит иначе: так как параллели сближаются, то ортогональными траекториями служат своеобразные кривые (рис. 18), которые Лобачевский называет *предельными окружностями* или просто *предельными линиями*. Если представлять себе, что параллели пучка сходятся в бесконечно удаленной точке, то можно сказать, предельная линия — это окружность, центр которой лежит в бесконечности. Расстояние между параллелями в различных точках будем измерять дугами проходящих между ними предельных линий — соответственными предельными дугами (см., например, AB', $A'B'$, $A''B''$,..., на рис. 18). Различие между геометрией Евклида и геометрией Лобачевского заключается в том, что в первой это расстояние между двумя параллелями одно и то же; в геометрии Лобачевского оно убывает в сторону параллелизма. Легко показать (мы не можем здесь на этом останавливаться), что отношение этих расстояний т. е. предельных дуг AB и $A'B'$, здесь зависит только от того, насколько эти дуги одна от другой удалены, т. е. от длины отрезков $AA' = BB'$. Имея это в виду, возьмем между параллелями две предельные дуги AB, $A'B'$,..., отстоящие одна от другой на расстояние $AA' = BB'$, равное единице длины (скажем 1 см); отношение $AB : A'B'$ представит собой некоторое определенное число, выражающееся неправильной дробью; обозначим ее через q. Если будем отодвигаться в сторону параллелизма на расстояние

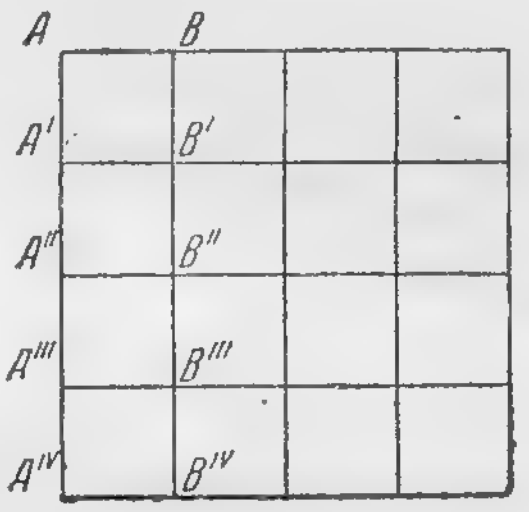


Рис. 17.

$$AA' = A'A'' = A''A''' = \ldots = 1,$$

то

$$AB : A'B' = q, \quad A'B' : A''B'' = q, \quad A''B'' : A'''B''' = q,$$
$$AB : A''B'' = q^2, \quad AB : A'''B''' = q^3, \ldots \qquad (7)$$

Если расстояние между предельными дугами l и l_0 составит n единиц длины, то отношение их длин $l : l_0 = q^n$, т. е. $l = l_0 q^n$. Обычными приемами не трудно обнаружить, что это соотношение остается в силе, когда расстояние между дугами выражается не целым числом, а

любым дробным, даже иррациональным числом x; всегда

$$l = l_0 q^x. \tag{8}$$

Вся суть здесь заключается в следующем. Пусть AB, $A'B'$, $A''B''$ произвольные три предельные дуги, содержа-

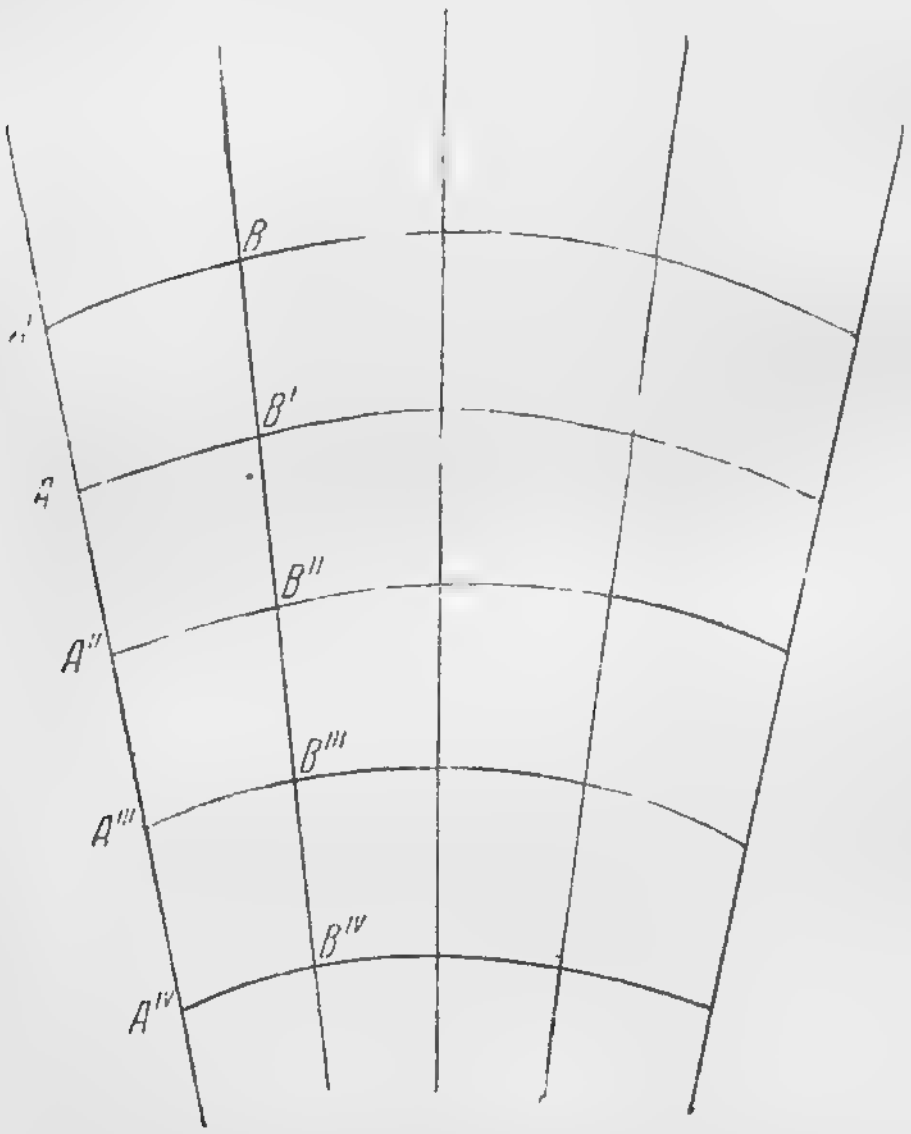


Рис. 18.

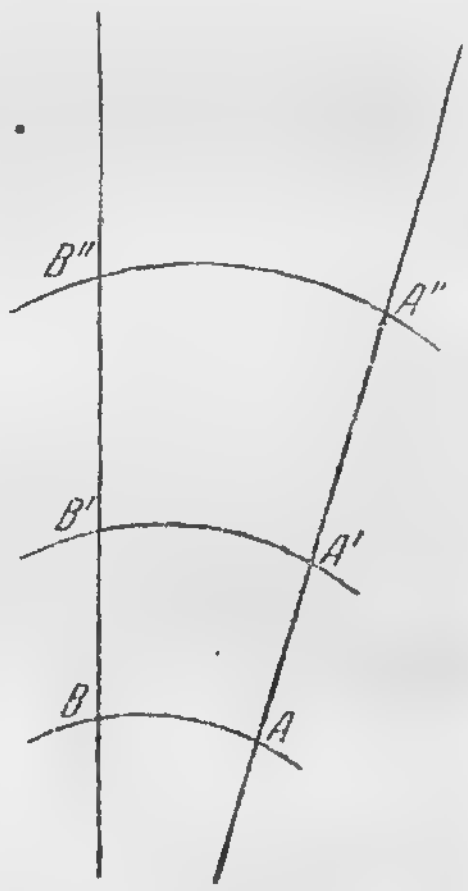


Рис. 19.

щиеся между теми же осями; x и y — расстояния между ними, отсчитываемые по оси ($x = AA'$, $y = A'A''$). Обозначим через $\varphi(x)$ отношение предельных дуг, отстоящих одна от другой по оси на расстояние x. Тогда (рис. 19)

$$A'B' = AB\,\varphi(x), \qquad A''B'' = A'B'\,\varphi(y), \qquad A''B'' = AB\,\varphi(x+y)$$

и поэтому

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y). \tag{9}$$

Функция $\varphi(x)$ должна, таким образом, удовлетворять функциональному уравнению (9). Коши показал, что единственная непрерывная функция, ему удовлетворяющая, есть q^x, где q — постоянное положительное число.

Соотношение (8) лежит в основе всей метрики, т. е. измерения всех величин в геометрии Лобачевского. Какое

же значение имеет эта неожиданно появившаяся постоянная q? Прежде всего ясно, что в евклидовой геометрии, где всегда $AB = A'B' = A''B''$, $q = 1$; в геометрии же Лобачевского $q > 1$. Необходимо было выяснить, какое значение эта постоянная должна иметь; мы к этому скоро вернемся (гл. XV), теперь же обращаемся к дальнейшим рассуждениям, которые в рассматриваемых мемуарах развивают эти результаты. Это связано с углубленным рассмотрением двумерной геометрии в пространстве Лобачевского.

Планиметрия есть геометрия плоскости. Но ведь не только плоскость имеет свою двумерную геометрию; строго говоря, такую геометрию имеет всякая поверхность. Однако в более узком смысле можно сказать, что в обыкновенном евклидовом пространстве специфическую геометрию имеют поверхности двух типов: плоскость и сфера. Это нужно понимать следующим образом. К числу основных приемов, которыми мы пользуемся при построении геометрии плоскости, относится наложение одной фигуры на другую, т. е. передвижение фигур по плоскости. Плоскость допускает передвижение в ней фигур без деформации, причем любая точка фигуры может быть приведена в совмещение с любой точкой плоскости; зафиксировав же одну точку, можно в плоскости ее вокруг этой точки вращать. Те же движения возможны и на сфере. Поэтому на сфере также можно строить геометрию, пользуясь движением, наложением фигур. При таком построении прямые заменяются геодезическими линиями сферы, т. е. теми линиями, которые здесь, подобно прямым на плоскости, проходя между двумя точками, представляют кратчайшее расстояние между ними; хорошо известно, что эту роль на сфере играют окружности больших кругов.

Геометрия сферы была уже построена в древности. Основные положения, из которых исходит геометрия сферы — аксиоматика сферической геометрии, — существенно иные, чем на плоскости: здесь две геодезические линии — две окружности больших кругов — всегда пересекаются не в одной, а в двух точках; дуга геодезической линии может быть продолжена в обе стороны, но всегда возвращается в точку исхода, геодезическая линия имеет

конечную длину; параллельных геодезических линий на сфере вовсе не существует. Сферическая геометрия в евклидовом пространстве, таким образом, существенно отличается от геометрии плоскости. Одно из важнейших ее отличий заключается в том, что *сумма внутренних углов геодезического треугольника* (т. е. треугольника, составленного из дуг больших кругов) *всегда больше 2d*. Итак, в евклидовом пространстве существует два типа поверхностей, которые допускают внутреннюю геометрию, основанную на движении без деформации: это геометрия плоскости и геометрия сферы. Другие поверхности полностью такой геометрии, без существенной модификации ее понимания, не допускают. Например, на трехосном эллипсоиде нельзя даже говорить о равенстве треугольников, ибо передвинуть треугольник с одного места на другое невозможно.

Так обстоит дело в евклидовом пространстве. Как это модифицируется в пространстве Лобачевского, т. е. в воображаемом пространстве, в котором царит геометрия Лобачевского? Плоскость и сфера и здесь имеют, конечно, каждая свою внутреннюю геометрию, в том смысле, как мы о таковой говорили выше. При этом геометрия сферы здесь совершенно та же, что и в пространстве Евклида. Это обусловливается тем, что здесь сохраняются все основные свойства сферы: две окружности больших кругов также пересекаются в двух точках, имеют одинаковую длину и т. д. Геометрия сферы в пространстве Лобачевского та же, что и в евклидовом пространстве. Напротив, плоскость несет здесь существенно другую геометрию — двумерную геометрию Лобачевского, основные черты которой выше уже достаточно отмечены.

Но зато в пространстве Лобачевского существуют еще другие поверхности, которые допускают внутреннюю геометрию, развертывающуюся теми же основными средствами, прежде всего свободным движением. Если предельную линию вращать вокруг какой-либо из ее осей, то получается своеобразная поверхность, которую Лобачевский называет *предельной сферой* или просто предельной поверхностью. Не точно, но образно, ее можно представить себе как сферу с бесконечно удаленным центром. Геодезическими линиями на этой поверхности служат предельные линии; такая поверхность может двигаться, скользить по себе самой так же, как плоскость и сфера:

на ней можно строить внутреннюю геометрию теми средствами, о которых мы говорили выше. Что это за геометрия? Лобачевский обнаружил, что это обыкновенная евклидова геометрия. *В пространстве Лобачевского предельная поверхность несет на себе двумерную евклидову геометрию.* Когда мы отказываемся от евклидовой геометрии на плоскости, она не прекращает своего существования, она переходит на другую поверхность — на предельную поверхность.

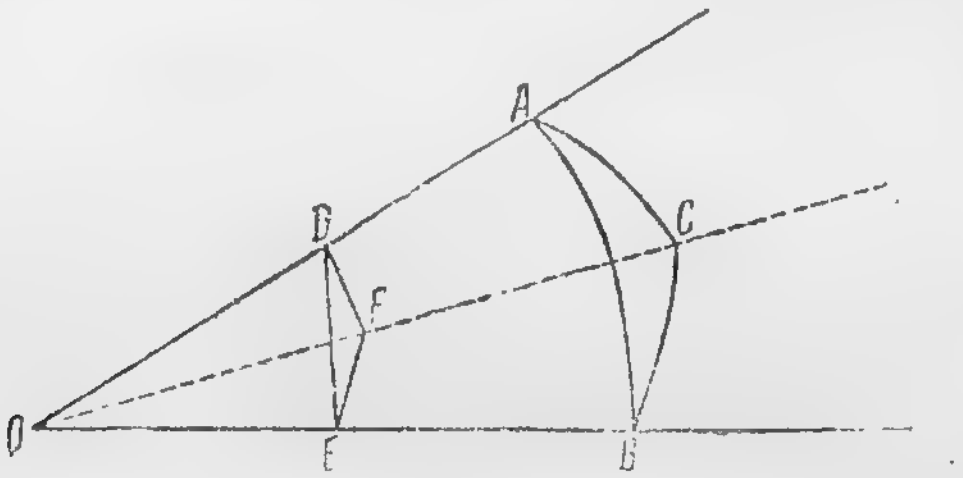


Рис. 20.

Это восстановление евклидовой планиметрии в неевклидовом пространстве имеет чрезвычайно большое значение. Вместе с нею сохраняются все средства евклидовой планиметрии и прежде всего ее тригонометрия. Благодаря этому получается возможность установить тригонометрию в пространстве Лобачевского, т. е. соотношения, которые в этом пространстве связывают стороны и углы прямолинейного треугольника. Чтобы уяснить себе, каким образом это осуществляется, припомним, как выводятся в евклидовом пространстве уравнения сферической тригонометрии; ограничимся простейшим случаем прямоугольного сферического треугольника.

Пусть ABC (рис. 20) — сферический треугольник с прямым углом при вершине C, O — центр сферы. Это значит, плоскости AOC и BOC взаимно перпендикулярны; двугранный же угол при ребре OB $(AOBC)$ измеряет угол B сферического треугольника. Из произвольной точки D на стороне OA опускаем перпендикуляр DF на прямую OC; он будет также перпендикуляром к плоскости BOC. Наконец, из точки F опускаем перпендикуляр FE на прямую OB; угол DEF, как линейный угол двугранного угла при ребре OB, измеряет угол B сферического

треугольника. Из прямоугольного треугольника DFE имеем

$$DF = DE \sin DEF = DE \sin B.$$

Но так как углы DOF и DOE измеряются соответственно сторонами b и c сферического треугольника, то

$$DF = OD \sin b, \quad DE = OD \sin c;$$

поставляя эти выражения в предыдущее уравнение, получаем соотношение

$$\sin b = \sin c \sin B; \tag{10a}$$

и таким же образом

$$\sin a = \sin c \sin A. \tag{10b}$$

Совершенно аналогичными соображениями устанавливается третье уравнение

$$\cos c = \cos a \cos b, \tag{10c}$$

связывающее катеты и гипотенузу сферического треугольника.

На треугольник DFE мы можем смотреть как на центральную проекцию сферического треугольника ABC из центра O на плоскость DEF, перпендикулярную к ребру OB; соотношения, имеющие место в этой проекции, приводят к уравнениям (10a), (10b), (10c). Можно, конечно, и наоборот, смотреть на сферический треугольник ABC как на проекцию на сферу из ее центра плоского треугольника DEF.

Таким образом, в евклидовом пространстве, исходя от плоскости, надлежащей проекцией на сферу получаем сферическую тригонометрию. В геометрии Лобачевского естественно исходить от предельной поверхности, несущей на себе наиболее простую евклидову геометрию. Проектируя надлежащим образом ее предельные треугольники на плоскость, Лобачевский пришел к тригонометрии прямолинейного треугольника в воображаемой геометрии, т. е. установил уравнения, связывающие сто-

роны и углы прямолинейного треугольника в воображаемой геометрии.

Как выглядят эти уравнения? Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза, A и B — острые углы прямоугольного треугольника ABC. Каждому из отрезков a, b, c соответствует значение угла параллельности: $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$. Выполнив вычисления в том порядке, как это указано выше, Лобачевский приходит к следующим тригонометрическим уравнениям прямоугольного треугольника ABC:

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A, \tag{11a}$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin B, \tag{11b}$$

$$\sin\Pi(a)\sin\Pi(b) = \sin\Pi(c). \tag{11c}$$

Здесь тригонометрические функции угла имеют те же значения, какие они для того же угла (в градусном выражении) имеют в обыкновенной геометрии. Всматриваясь в эти уравнения, видим, что первые два отличаются от соответствующих уравнений обыкновенной тригонометрии тем, что, вместо длин a, b, c соответствующих сторон треугольника, здесь фигурируют $\operatorname{ctg}\Pi(a)$, $\operatorname{ctg}\Pi(b)$, $\operatorname{ctg}\Pi(c)$. Еще более своеобразный вид имеет соотношение (11c), выражающее связь между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника, заменяющее таким образом пифагорову теорему евклидовой геометрии. Мы, впрочем, увидим, что некоторое родство между этими уравнениями и соответствующими уравнениями обыкновенной тригонометрии не только существует, но даже не так глубоко сокрыто.

Из уравений (11a) — (11c) уже можно чисто алгебраически получить выводные уравнения, которые часто бывают очень полезны. Так, уравнения

$$\cos\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\operatorname{tg}A, \quad \cos\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(a)\operatorname{tg}B \tag{11d}$$

определяют катет треугольника по другому катету и острому углу, противолежащему первому катету; а уравнения

$$\cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos B, \quad \cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cos A \tag{11e}$$

определяют катет по гипотенузе и прилежащему к этому

катету острому углу.[1] Уравнения (11a) и (11b) обыкновенно называют *теоремой синусов*, уравнения (11c) — *теоремой косинусов*.

Хотя уравнений (11a) — (11c) как будто достаточно для решения прямоугольного треугольника, но фактически мы воспользоваться ими еще не в состоянии: это было бы возможно, если бы мы умели по данным a, b, c определять соответствующие значения углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ и обратно. Мы упираемся, таким образом, в задачу о разыскании аналитического выражения функции $\Pi(x)$ через ее аргумент x, к отысканию функции $\Pi(x)$, как говорит Лобачевский. Он хорошо понимал, что уравнения (11) получат конкретные значения только после того, как эта функция будет разыскана; на этом теперь было сосредоточено главное внимание. И ему это удалось выполнить. Опираясь уже на соотношения (11), Лобачевский показал, что функция $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ удовлетворяет тому же функциональному уравнению (9), которым оно и определяется; именно при всяком значении x

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x) = q^x, \tag{12}$$

где постоянная q имеет то же значение, что и в уравнении (8).[2] Соотношение (12) обыкновенно называют

---

[1] Приведем для ясности такой вывод. Перемножая уравнения (11a) и (11c), получим:

$$\cos\Pi(a)\sin\Pi(b) = \cos\Pi(c)\sin A. \tag{11c'}$$

Исключая угол $\Pi(c)$ из уравнений (11c) и (11c'), легко получим:

$$\sin^2 A = \frac{\cos^2\Pi(a)\sin^2\Pi(b)}{1-\sin^2\Pi(a)\sin^2\Pi(b)}$$

и отсюда

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A} = \frac{\cos^2\Pi(a)\sin^2\Pi(b)}{1-\sin^2\Pi(a)\sin^2\Pi(b)-\cos^2\Pi(a)\sin^2\Pi(b)} = \cos^2\Pi(a)\operatorname{tg}^2\Pi(b).$$

По извлечении корня из обеих частей получим первое уравнение (11 d).

[2] Следует отметить, что совершенно безукоризненное доказательство того, что постоянная q здесь имеет то же значение, что и в уравнении (8), было дано Лобачевским значительно позже в сочинении «Пангеометрия» (см. гл. XXII).

основным уравнением геометрии Лобачевского. С его помощью все вопросы метрической геометрии разрешаются; когда оно было найдено, элементы новой «воображаемой» геометрии были установлены.

Уравнениями (11) и (12), как указывает Лобачевский, заканчивалось рассуждение «Exposition succincte». Из них очень просто, чисто алгебраически выводятся также уравнения косоугольного треугольника, которыми заканчиваются и «Геометрические исследования».

Таким образом, в феврале 1826 г. новая геометрия в своих основах была Лобачевским построена. Впрочем, оставалось еще ответить на вопрос, какое же значение имеет постоянная q. И, что не менее важно, оставалось еще выяснить, привели ли все эти рассуждения к безупречной, новой геометрии; стоял еще ряд вопросов, которые, конечно, возникают у читателя, которые возникли и у Лобачевского. Свет на эти вопросы проливает дальнейшее развитие тех же идей.

ГОДЫ ТВОРЧЕСКОГО РАСЦВЕТА. АДМИНИСТРАТИВНАЯ И ОБЩЕСТВЕННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

XIV. Первый период руководства университетом

Семь лет, в течение которых Магницкий уродовал Казанский университет, наложили тяжелую печать на все стороны его жизни. Первый биограф Лобачевского, Э. П. Янишевский, в конце своей жизни напечатал в распространенной казанской газете ряд статей, посвященных воспоминаниям о былых годах Казанского университета.[1] В одной из них он пишет:

«При составлении биографии Лобачевского пришлось перечитать много архивных университетских дел времени Магницкого, и я дивился только, каким образом учебное заведение, только что возникшее, полное молодой жизни, можно было так перековеркать, что оно сделалось в короткое время чем-то уродливым, похожим на монастырь, в котором все живое было похоронено, и остались лишь тени наук, переполненные ханжеством и лицемерием. Студенчество того времени представляло каких-то нравственно исковерканных, загнанных, приниженных, полных ханжества уродов, похожих не на молодежь, полную свежести, юношеских сил и мечтаний, а на какую-то нищенствующую братию ордена ханжества».

Магницкий пал. Его падение, как изложено выше, было вызвано двумя причинами. Во-первых, Магницкий зашел

---

[1] Э. П. Янишевский. Воспоминания старого студента. Волжский вестник, № 4, 7, 11, 13, 17, 20, 1893.

в своих тенденциях далеко за пределы какого бы то ни было здравого смысла; во-вторых, в своем усердии он лично задел Николая Павловича, будущего императора, и вызвал его недоверие. Но какого-либо поворота в политике правительства, более либерального его отношения к делу просвещения не было и в помине. Наступила николаевская эпоха, углубившая реакцию, даже укрепившая кое-что из того, что проводил Магницкий; так, в университетах твердо проводилось единообразие преподавания. Но Казанский университет находился в таком состоянии, при котором эта новая эпоха все же значительно облегчила его существование. Созданию более здоровых условий жизни университета теперь содействовал главным образом Н. И. Лобачевский.

Попечителем Казанского учебного округа, вместо Магницкого, был назначен граф М. Н. Мусин-Пушкин. Это был казанский помещик, проведший многие годы на военной службе в казацких полках. Позже он был назначен попечителем в Петербург; вот как его характеризует бывший петербургский профессор Ф. Устрялов.[1]

«Личность эта была оригинальная, недалекая и в высшей степени неприятная. Получив самое ограниченное образование, он служил прежде в военной службе и, может быть, нюхал порох, но, конечно, не изобрел его. Он свыкся с казарменной жизнью и все спасение находил в дисциплине прежних, аракчеевских времен. Дисциплину он старался применить и к науке, и к профессорам, и к студентам. Вид его был свирепый: густые, нахмуренные брови, крючком выдающийся нос и угловатый подбородок обозначали некоторую силу характера и упрямство. Говорили, будто по временам он бывал добрым человеком; но я полагаю, что если в редких случаях и выказывал он доброту, то она происходила единственно от самодурства. Он умел пользоваться обстоятельствами, надевал на себя личину человека с страшною силой характера и подделывался к великим мира. В нем точно в последнем осколке воплощались отживший строй жизни, порядок ненавистных времен: все то, что дали нам казенщина, солдатчина, крепостное право и барство, выражалось в нем во всем своем безобразии. Представитель ни-

[1] Ф. Устрялов. Воспоминания о С.-Петербургском университете в 1852—1856 годах. Исторический вестник, июнь 1884, гл. VI.

колаевской эпохи, Мусин-Пушкин стремился олицетворить собой идеал маленького деспота, считая, что только одним страхом можно действовать на молодежь. А наилучшим средством для держания ее в страхе являлась, по его мнению, лишь грубость. И, действительно, трудно представить себе в настоящее время, до какой степени неукоснительно и строго придерживался Мусин-Пушкин этих принципов грубости и дерзкого обращения. Он не мог понимать нравственное состояние молодежи, так как сам был человек мало образованный и невоспитанный».

Еще резче характеризует Мусина-Пушкина другой петербургский профессор, Никитенко.[1] Может быть, эта характеристика относится главным образом к петербургскому периоду его деятельности; но большой разницы в его взглядах, конечно, произойти не могло.

Такому администратору не под силу было вывести университет из того состояния, в котором он находился. Всю неприглядность этой картины Мусин-Пушкин себе и сам очень скоро уяснил. «Рассказывали, — пишет Янишевский в тех же «Воспоминаниях», — что когда Мусин-Пушкин, вскоре после его назначения, заметивши, что на танцевальных вечерах в дворянском собрании не бывает студентов, приказал инспектору, чтобы в следующий же раз студенты были на вечере, то инспектор привел троих из наиболее смелых; но и те, войдя в танцевальную залу, прежде всего начали креститься на образ и кланяться на все стороны, после чего Мусин-Пушкин обругал их дураками и выгнал вон».

При всем том не подлежит сомнению, что к Казанскому университету Мусин-Пушкин относился благожелательно. Он сам провел в Казани молодые годы; здесь получил при университете, как тогда говорили, «право на чин»; работа на почве просвещения еще была для него внове. Янишевский в тех же «Воспоминаниях» описывает его деятельность в Казани в гораздо более мягких тонах. «Пушкин считал университет своим детищем; он иначе не говорил, как «мой университет», «мои профессора», «мои студенты»; он ревниво оберегал это свое детище от вмешательства посторонних... Вместе с тем Мусин-Пушкин был чрезвычайно строг и требователен ко всем служащим

---

[1] Никитенко. Записки и дневник, 2-е изд., 1905, стр. 378, 384 484.

университета». От того ли, что Мусин-Пушкин сознавал трудность лежавшей на нем задачи, или от того, что он не предполагал постоянно жить в Казани, он подыскивал себе надежного помощника в лице ректора университета. Ко времени его назначения ректором состоял профессор-медик К. Ф. Фукс. По словам многих лиц, это был далеко не плохой и не заурядный человек. В Казани о нем вспоминают как об очень культурном человеке; одно время его дом считался даже центром казанской интеллигенции. Но это был совершенно безвольный человек. Он не только целиком подчинялся влиянию Магницкого, он не был даже в состоянии вести заседания совета, они носили у него шумный и беспорядочный характер. После ухода Магницкого ему, конечно, уже не было места на посту ректора. Не без натяжки было признано необходимым произвести новые выборы. Но Мусин-Пушкин на этом настаивал, члены совета не возражали, не возражал и Фукс. Мусин-Пушкин повел переговоры с членами совета о кандидате в ректоры. Остановились на Н. И. Лобачевском. Николай Иванович долго колебался: он, конечно, понимал всю трудность предстоявшей задачи. В конце концов он дал согласие, был избран и с 3 мая 1827 г. состоял ректором Казанского университета. Конечно, борьба партий, главным образом немецкой и русской, не скоро затихла. Лобачевскому было только 33 года; нужно было много такта, энергии и труда, чтобы ввести университет в более здоровые условия жизни. Задача оказалась даже гораздо более трудной, чем Лобачевский себе это представлял. Через полгода в письме к Мусину-Пушкину от 1 сентября 1827 г. Лобачевский писал: «Сперва по предположению только, а теперь по собственному опыту должен сказать, что должность ректора огромна. Едва ли сочинявшие устав могли предполагать, в чем она будет состоять, и едва ли не надобно сожалеть, что отменили директоров.[1] Я уверен, что Вы не примете слова мои, будто я хочу увеличить в глазах Ваших мои труды. Не хочу также слишком мало и на себя надеяться. Наконец, мой нрав не таков, и правила, чтобы унывать и раскаиваться, когда нельзя помочь чему. Простительнее мне, кажется, робеть, когда еще надобно ре-

[1] Должность директора, введенная Магницким, была отменена тем же указом, которым Магницкий был уволен.

шиться; но когда дело решено, то не надобно падать духом. Так Вы заметили без сомнения, сколько я колебался и искал даже ухватиться; теперь хочу быть твердым и стараться всеми силами». В этих строках с достаточной ясностью сквозит настроение, вызванное теми трудностями, которые Лобачевский встретил в начале своей деятельности на посту ректора университета, о тех усилиях, которые нужно было употребить, чтобы эти трудности преодолеть. Но он с этой сложной задачей справился; и если все, писавшие об эпохе Мусина-Пушкина, согласны в том, что при крутом его нраве «в Казанском университете все же задышалось легче», то не подлежит никакому сомнению, что университет и попечитель были этим обязаны Н. И. Лобачевскому. Он завоевал признание и уважение товарищей, он шесть раз переизбирался на эту должность. При нем деятельность совета вошла в нормальное русло, при нем были частью вновь построены, частью перестроены все университетские здания, библиотека, кабинеты, клиники, обсерватория; все учреждения были снабжены необходимыми пособиями и инструментами; университет начал пополняться профессорами, «между которыми, — говорит Янишевский, — хотя и было немало чудаков, особенно из немцев, но появились и личности вполне достойные, приобревшие заслуженную известность в ученом мире». Пушкин, несомненно, понимал и ценил эту роль Лобачевского и почти во всем следовал его советам. Как бы ни бранили Мусина-Пушкина петербуржцы, но в отношении Казанского университета он несомненно имел большие заслуги.

Каким тактом, какой волей, каким моральным авторитетом должен был обладать Лобачевский, чтобы подчинить себе эту грубую, деспотическую натуру и направить его деятельность по здоровому руслу! Уехав вскоре в Петербург, Мусин-Пушкин предложил Лобачевскому вести, помимо официальных сношений, личную переписку; сохранилось 21 письмо Лобачевского и только 2 письма Мусина-Пушкина. Нужно удивляться чрезвычайно равному для той эпохи тону этой переписки, по которому часто не узнаешь, кто начальник, кто подчиненный. «Искренне благодарен Вам, — писал Мусин-Пушкин Лобачевскому 20/I 1820 г. — за дружбу Вашу. Верьте, что в чувствах моих к Вам никогда не переменюсь». Фактический материал, относящийся к жизни Казанского университета за

время совместной работы Лобачевского и Мусина-Пушкина, содержится в выпущенном за это время отчете по университету.[1] Отчет делит этот период на две части, из которых первая охватывает первые девять лет, когда университет жил по уставу 1804 г., вторая — следующие семь лет (1837—1844), когда был полностью проведен в жизнь устав 1835 года. Это деление здесь тем более подходит, что и научная работа Лобачевского была в эти годы существенно различной.

Первой задачей Лобачевского на посту ректора было внесение успокоения в среду профессоров и студентов. Нельзя сказать, что он совершенно устранил разногласия, особенно между немецкой и русской группировками профессоров; но спокойной выдержанностью, убеждениями в заседаниях совета и у себя на дому он их значительно смягчил. Заседания совета, прежде шумные и беспорядочные, приняли нормальный характер.[2] Между студентами же совершенно исчезло шпионство и ханжество, которое было так распространено в эпоху Магницкого.[3] Во всей университетской среде наступило оздоровление; это была первая и очень важная заслуга Лобачевского. По-видимому, в этом сыграли большую роль и взгляды Лобачевского на дело воспитания.

Через год после вступления в должность ректора в торжественном собрании университета 5 (17)/VII 1828 г. Лобачевский произнес речь, которую позже опубликовал под названием «О важнейших вопросах воспитания».[4] Речь, несомненно, содержит немало тривиального и притом не только с нашей точки зрения: такой она показалась бы и в свое время в Европе; несмотря на упоминания о Бэконе, Декарте, она показалась бы странной по своей оторванности от тех споров о воспитании, которые так настойчиво велись в западной литературе. Но здесь, на далекой восточной окраине, в условиях николаевского режима она производит впечатление не только самостоятельности и свежести, но даже и смелости: она

---

[1] Отчет Казанского университета и учебного округа за 17 лет, с 1827 г по 1 января 1844 г., Казань, 1844.

[2] Э. П. Янишевский. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского, стр. 49.

[3] Янишевский. Воспоминания старого студента. Волжский вестник, 1893, № 4.

[4] Казанский вестник, 1832, июль.

несомненно шла в разрез с теми тенденциями, которые господствовали в деле воспитания юношества в русской школе того времени на всех ее ступенях. Речь начинается тривиальными соображениями о необходимости образования; но, переходя к тому, какое образование должен давать университет, Лобачевский высказывает взгляды, очень характерные для его мировоззрения. Исходная его мысль заключается в том, что это образование должно быть чуждо всякой схоластики. В словах, обращенных к студентам, повидимому, слышатся указания профессорам: «Мы живем уже в такие времена, когда едва тень прежней схоластики бродит по университетам. Здесь, в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что известно одним праздным умам».

Но основная мысль Лобачевского заключается в том, что культура человека не определяется одним образованием, как ни велико его значение; она не в меньшей мере определяется воспитанием. Главная задача воспитания заключается в том, чтобы растить в человеке жизнерадостность, ибо «жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем». Воспитание не должно подавлять личность, оно должно растить «все способности ума, все дарования, все страсти», ибо нет ничего более ничтожного, чем бесстрастие, отсутствие вкуса к изящному, к воображению. Нужно растить в человеке стремление к славе, не опасаясь растущего с этим честолюбия. Во всем этом слышится протест против того гнетущего воспитания, подавления личности, преобладавшего, как мы видели, в той школе, в которой учился Лобачевский. И может быть, как протест против той обиды, которую он, мальчик из бедной семьи, переживал в школе, звучат следующие слова: «Но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнью. Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из нашего университета не выйдут произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если к несчастью родились с таким назначением. Не войдут, повторяю, потому что здесь

продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства».

Лобачевский был доволен разультатами своего воздействия на молодежь. Сообщения об этом постоянно повторяются в его письмах к Мусину-Пушкину. Но за этими общими задачами, за этими его взглядами, пронизывавшими всю его деятельность, стояла сложная и трудная повседневная работа. Переписка отражает все ее многообразие.

В сущности, административная работа Лобачевского, его участие в различных органах управления, в различных формах деятельности университета началась уже задолго до его избрания в ректоры. Как мы видели, он около семи лет был деканом факультета; он входил в состав библиотечной, строительной, редакционной, школьной и других комиссий. Но прежде он был если и деятельным, то все же рядовым членом каждой из этих комиссий; теперь он в каждой из них становится главным, руководящим и ответственным лицом. И не простым было это руководство, не легка была эта ответственность.

Целую эпопею, например, составляет история борьбы за приведение в порядок университетской библиотеки, борьбы с людьми, принимавшими на себя обязанности, которых не исполняли, с тем же Кондыревым, который теперь управлял библиотекой. Не стоит, конечно, здесь на этом останавливаться; верно то, что Лобачевскому стоило очень большого труда сделать из этого скопища книг, приведенного в управление Магницкого в полный беспорядок, настоящую научную библиотеку, создать в ней традиции, которые преемственно поддерживаются по сей день. Более того, ему удалось получить значительные суммы на ее пополнение и улучшение.

Библиотека была не единственным учреждением, в котором в эпоху Магницкого царил такой беспорядок. Нельзя не удивляться тому состоянию, в котором находились, можно сказать, все учебно-вспомогательные учреждения. Нельзя было разобраться в том, кто заведывал тем или иным учреждением, как расходовались отпускавшиеся на них средства. Целые коллекции, прибывшие из-за границы, не были распакованы, некоторые лишь с большим трудом удалось разыскать. Методическим, неослабным вниманием и надзором Лобачевский добился того, что все эти учреждения пришли в благоустроенное

состояние. Только в управление Лобачевского университет становится настоящим высшим учебным заведением, устанавливаются формы его нормального развития.

Главную трудность при осуществлении этого представляет создание для университетских учреждений достаточных помещений; нужно было развернуть строительство университета. В этом деле значительную заслугу имел Магницкий; но и он уже привлек к этому делу Лобачевского. Теперь Лобачевский становится председателем строительного комитета; университетское строительство становится вряд ли не главной его заботой. С каким интересом Лобачевский к этому относился, видно из того, что он занялся изучением архитектуры, чтобы быть на высоте этой задачи. Мы, впрочем, об этом скажем подробнее ниже, когда перейдем к периоду, в который это строительство пришло к завершению.

Одной из самых больших заслуг Лобачевского в первый период его управления университетом была та распорядительность, та энергия, которую он проявил во время постигшего Казань стихийного бедствия. В конце 1830 г. в Казани началась эпидемия холеры. Описания этого бедствия можно найти во многих литературных произведениях; большей частью это воспоминания различных лиц, переживших это событие. Особенный интерес для нас представляют «Записки о холере» профессора Фукса,[1] так как он лично принимал деятельное участие во врачебном надзоре и в тех мерах, которые проводились в университете; к тому же эти записки написаны вскоре после окончания эпидемии. При первых вестях о появлении холерных заболеваний в Казани Лобачевский запросил губернатора о том, насколько основательны эти слухи. Но губернатор ответил, что он не имеет достаточной причины подозревать существование холеры. Между тем Фукс пишет, что ворота уже были всюду заперты. «Ужас разлился по всем улицам, многие зажиточные люди оставили город, а другие, менее достаточные, старались по крайней мере запастись съестными припасами на полтора месяца; цены на потребности жизни возвысились». Лобачевский немедленно принял решительные меры для охраны населения университета. Более того, он сейчас же отправился к губернатору и настоял

[1] «Казанский вестник», 1831.

на том, чтобы санитарные мероприятия были приняты во всем городе. Совет, созванный 13 сентября, вынес постановление, напоминающее древнеримское «caveant consules», — он предоставил ректору «принимать нужные меры для сохранения здоровья казенных воспитанников и всех живущих в зданиях университета». Лобачевский принял к исполнению эти диктаторские полномочия. Прежде всего он собрал на территории университета не только профессоров (желавших там поселиться) и студентов, но и всех связанных с университетом людей. Он принял меры к изоляции этой территории; вода, съестные припасы, все необходимое доставлялись на один из отдаленных дворов и принимались с возможной осторожностью. Был принят ряд дезинфекционных мер и установлена быстрая изоляция заболевавших; ректор лично принимал в этом деятельное участие. В результате, из 560 человек, живших на территории университета, холерой заболело только 12 человек; это не шло ни в какое сравнение с тем, что происходило в городе. Из студентов ни один не заболел холерой, из профессоров заболело и погибло двое. Трудные это были дни; в Казани память об этом времени живет еще и по сей день; и светлым ореолом на фоне этих страшных событий окружено имя Лобачевского.

К ноябрю заболевания холерой начали стихать; в начале ноября возобновил свои действия совет; в середине месяца начались занятия. В университете восстановилась учебная и ученая жизнь. Лобачевский за свою деятельность во время холерной эпидемии получил благодарность от царя.

XV. Мемуар «О началах геометрии»

Многие ученые, одаренные большим талантом, отличались удивительной способностью соединять продуктивную научную работу с большой административной и общественной деятельностью. Лейбниц публиковал свои обширные философские и математические исследования среди большой государственной, административной и дипломатической работы. Монж соединял свою научную работу со сложными обязанностями военного министра во время революционных войн. У нас М. В. Ломоносов также совмещал свою научную работу с большой административной деятельностью. Этим свойством обладал и Лоба-

чевский. Когда подробно знакомишься с деятельностью Лобачевского в первый период управления университетом, даже когда читаешь только его письма к Мусину-Пушкину, то недоумеваешь, как он мог совместить с этими сложными обязанностями углубленную исследовательскую работу. Между тем именно в эти годы он опубликовал самые важные свои труды.

Мы уже знаем, что в 1829 г. в «Казанском вестнике» был напечатан первый его мемуар «О началах геометрии» [1]. Первая часть этого мемуара восстанавливает его доклад, рассуждение «Exposition succincte», и содержит изложение элементов созданной им «воображаемой» геометрии. Развертывая ее во второй части, Лобачевский прежде всего ставит вопрос о значении постоянной q в уравнениях (8) и (12); он предпочитает впрочем пользоваться связанной с q константой k, представляющей число, обратное натуральному логарифму q, так что

$$k = \frac{1}{\ln q}, \qquad q = e^{\frac{1}{k}}. \tag{13}$$

Евклидова геометрия соответствует значению $q = 1$, т. е. значению $k = \infty$. Уравнение же (12) принимает вид:

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{\frac{x}{k}}. \tag{14}$$

Дальнейшие рассуждения исходят из того факта, что угол параллельности $\Pi(x)$ неограниченно приближается к d (к прямому углу), когда x стремится к нулю. Иными словами, каков бы ни был угол a, как бы мал он ни был, при достаточно малых значениях x, угол $\Pi(x)$ отличается от d меньше чем на a. Сопоставим теперь два обстоятельства: 1) геометрический факт, что в евклидовой геометрии угол параллельности всегда прямой; 2) чисто физический факт, что всякий прибор, в том числе, конечно, и угломерный прибор, имеет предел чувствительности В эпоху Лобачевского чувствительность угломерных приборов еле достигала $1''$; это значит, что углы, различающиеся менее чем на $1''$, измерительными приборами не могли быть отличены один от другого.

---

[1] Точнее, мемуар был напечатан частями, в книжках за февраль, март, апрель и ноябрь, декабрь 1829 г. и в книжках за март, апрель и июль, август 1830 г.

Сделаем теперь предположение, что в нашем пространстве имеет место не обыкновенная геометрия Евклида, а «воображаемая» геометрия Лобачевского. Обозначим через z расстояние, при котором угол параллельности в нашем пространстве отличается от d меньше чем на $1''$. Если бы мы производили измерения углов параллельности на расстояниях, меньших z, то мы не отличали бы их от прямого угла; мы имели бы впечатление, что в пространстве, в котором мы оперируем, царит геометрия Евклида. Такое положение должно было бы наступить неизбежно, если бы мы ограничили круг своих наблюдений достаточно малой областью. Но какую область мы должны считать малой? Каково то расстояние z, на котором угол параллельности отличается от прямого меньше чем на $1''$? Теория не дает, не может дать на это никаких указаний. Не лишено возможности, что при огромных размерах вселенной те расстояния, которые мы считаем большими, даже расстояния от Земли до звезд, все еще меньше этого z.

«Нельзя не увлекаться, — замечает Лобачевский, — мнением Лапласа, что видимые нами звезды принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобно тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и др. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжено неограниченно, сама природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостью даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд».

Между тем, после Лобачевского за истекшие сто с лишком лет обнаружено, что космические расстояния, доступные нашему измерению, несравненно больше, чем себе рисовал Лаплас; расстояния между звездами иногда выражаются в сотнях миллионов световых лет. И становится совершенно естественным думать, что наша вера в незыблемую точность евклидовой геометрии имеет свой источник в том обстоятельстве, что все наши измерения и наблюдения производятся в совершенно ничтожном, «исчезающем», по выражению Лобачевского, уголке вселенной. Как же это выяснить?

Попытку опытной проверки того, имеет ли в нашем пространстве место, как выражается Лобачевский, «употребительная, или же воображаемая, геометрия», он делал

исходя из другого принципа. Мы знаем уже, что дилемма между евклидовой и неевклидовой геометрией Лобачевского эквивалентна тому, равна ли сумма внутренних углов прямолинейного треугольника $2d$ или она меньше $2d$. Это Лобачевский и хотел экспериментально проверить. С этой целью, опираясь на параллаксы трех неподвижных звезд (по его номенклатуре — Кейды, Ригеля и Сириуса), Лобачевский вычисляет сумму углов в треугольнике, вершины которого находятся в концах земной орбиты и в одной из этих звезд. В частности, выполнив вычисления для того случая, когда третьей вершиной треугольника служит Сириус, он приходит к выводу, что эта сумма отличается от $2d$ меньше чем на $0.000372''$. В его вычисление вкралась ошибка, эта разница получается еще в 100 раз меньшей. Само собой разумеется, что этот результат не может служить основанием для решения вопроса при учете размеров вселенной; некоторые конкретные основания для этого, правда, все еще ненадежные, заставили себя ждать около 100 лет. Но принципиально вера в незыблемость евклидовой геометрии уже была подорвана, правда, в то время еще у очень немногих математиков, которые были в состоянии усвоить идеи Лобачевского, которые были способны отрешиться от беспросветной косности, всегда стоявшей на пути смелой научной мысли.

Не будем, однако, забегать вперед, возвратимся к вопросу о константе k. Заметим прежде всего, что уравнение (14) дает

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}, \quad \operatorname{cosec} \Pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}. \tag{15}$$

Если правые части разложим в ряды по степеням $\frac{x}{k}$ и, считая эту дробь весьма малой, сохраним только члены порядка ниже 3-го, то получим

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{x}{k}, \quad \operatorname{cosec} \Pi(x) = 1 - \frac{x^2}{2k^2} \tag{16}$$

и отсюда с той же точностью

$$\cos \Pi(x) = \frac{x}{k}. \tag{16а}$$

Можно сказать, что функции $\operatorname{ctg} \Pi(x)$, $\operatorname{cosec} \Pi(x)$ и $\cos \Pi(x)$ имеют эти значения (16) и (16а) для значений x, на-

столько малых по сравнению с k, что третьей степенью отношения $\frac{x}{k}$ можно пренебречь. Вставив эти значения в уравнения (11), получаем:

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B, \quad a^2 + b^2 = c^2;$$

мы приходим к уравнениям евклидовой геометрии. Итак, каково бы ни было значение k, на протяжениях, весьма малых по отношению к k, действуют соотношения евклидовой геометрии.

В связи с этим Лобачевский приходит к убеждению, что теоретически k может иметь совершенно произвольное значение; это значит, каждому значению константы k соответствует своя логически безукоризненно правильная «воображаемая» геометрия. Иначе говоря, существует не одна «воображаемая» геометрия; она допускает бесконечное множество разновидностей, соответствующих различным значениям постоянной (параметра) k. Среди них предельное место (при $k = \infty$) занимает старая геометрия Евклида. Что касается того, какое значение имеет k в нашем конкретном пространстве, в котором прямыми линиями служат лучи света, то это вопрос не логический, а физический; установить это возможно только экспериментально. Пока наши измерения не дают никаких отклонений от геометрии Евклида, мы можем предполагать, что она только и существует в нашем пространстве. Но если бы измерения наши, проникнув в очень удаленные области мироздания, обнаружили отклонения от геометрии Евклида, то по характеру и размерам этого отклонения можно было бы определить значения константы k.

Однако каково бы ни было значение постоянной k, соответствующая неевклидова геометрия имеет своеобразную особенность; в ней каждому отрезку соответствует некоторый угол (угол параллельности, отвечающий этому отрезку), и обратно, каждому углу соответствует некоторый отрезок (отрезок параллельности, отвечающий этому углу); имеет место некоторая зависимость между отрезком и углом. До Лобачевского геометры, пытавшиеся доказать постулат о параллельных от противного, неоднократно приходили к заключению, что отрицание постулата приводит к «неестественной зависимости» между отрезком и углом. Это особенно подчеркивал Лежандр, дававший этому такое выражение, что отрицание V постулата нару-

шает принцип однородности, — это и есть тот абсурд, к которому такое отрицание приводит.

Лежандр так понимает сущность этого «принципа». Положим, что каждому углу ω отвечает некоторый отрезок x; иначе говоря, отрезок x есть функция угла ω: $x = \varphi(\omega)$. Между тем угол, как обыкновенно говорили, выражается отвлеченным числом; следовательно, и $\varphi(\omega)$ есть число отвлеченное; с левой же стороны предыдущего равенства стоит «линейная величина» x. Принцип однородности заключается в том, что такое равенство невозможно. Это мотивируется так: если изменим единицу длины, то правая часть от этого не изменится, левая же приобретет некоторый множитель; равенство нарушится, оно не может иметь места. Принцип однородности, таким образом, приводит к доказательству постулата. Но уравнение (14) показывает, что угол определяется не отрезком, а отношением отрезка к другому постоянному отрезку длины k. Однородность вовсе не нарушается; неожиданно только то, что выплывает константа — постоянный отрезок. Приведем теперь подлинные слова Лобачевского:

«После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов, предположение, которое многие геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства, может быть оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира. С другой стороны, мы не в состоянии постигать, какая бы связь могла существовать в природе вещей, и соединять в ней величины столь разнородные, каковы линии и углы. Итак, очень вероятно, что евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными. Как бы то ни было, новая геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении, и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое обширное поле для взаимных применений геометрии и аналитики».

Конечно, это утверждение еще звучит недостаточно убедительно. Нет уверенности, что в построении Лобачевского, повидимому, складном в своих элементах, где-либо не таится противоречие, что новая геометрия, даже если она только и «существует в нашем воображении», остается безукоризненно правильной и притом при любом значении k,

что она действительно открывает надежный путь «для взаимных приложений аналитики и геометрии». Лобачевский это хорошо понимал; это, главным образом, и побудило его к дальнейшему развитию воображаемой геометрии. Такое развитие идет через аналитическую и дифференциальную геометрию неевклидова пространства.

Допуская существование новой геометрии при любом значении параметра k, Лобачевский принимает отрезок длины k за единицу меры. Это, не нарушая общности, приводит к упрощению формул и вычислений; так, формулы (14) — (16) принимают вид

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^x,$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{cosec}\Pi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (15')$$

и для отрезков весьма малых по сравнению с принятой единицей

$$\operatorname{ctg}\Pi(x) = x, \quad \operatorname{cosec}\Pi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos\Pi(x) = x. \quad (16')$$

При всем том, и это наводило на серьезные сомнения и возражения. Выходит, что в пространстве, в котором имела бы место геометрия Лобачевского, должна была бы существовать некоторая определенная длина, определенный стандартный отрезок, который преимущественно надлежало бы принять за единицу меры; выходит, что можно принципиально отличать один отрезок от другого.

Единицу меры длины в евклидовом пространстве можно определить только непосредственным физическим заданием соответствующего отрезка — *эталоном*; это *физическое* задание единицы длины. В пространстве Лобачевского мы можем задать единицу длины, например, таким положением: *примем за единицу длины отрезок, которому соответствует угол параллельности в 45°*. Этим единица длины будет задана *геометрически*. «Нельзя себе представить, — говорили, — каким образом один отрезок может быть геометрически, словесным определением отличен от других». Даже Гаусс по этому поводу писал: «Единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной

мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства». Отметив, однако, эти соображения, возвратимся к вычислениям Лобачевского.

В плоскости устанавливаем ортогональный координатный крест XOY (рис. 21) и из произвольной точки плоскости опускаем на прямые OX и OY перпендикуляры MN и MN'. Как и в классической геометрии, принимаем длины отрезков ON и NM, взятые с надлежащими знаками, за абсциссу и ординату (x и y) точки M. Нужно, однако, иметь в виду, следующее. Здесь, в плоскости Лобачевского, четырехугольник $MNON'$ имеет только три прямых угла; угол при вершине M — острый. Вместе с тем отрезки NM и ON' не равны, не равны также отрезки ON и $N'M$. Таким образом, ордината y не может быть заменена длиной отрезка ON'; если бы за ординату принять длину ON', то это была бы уже другая координация.

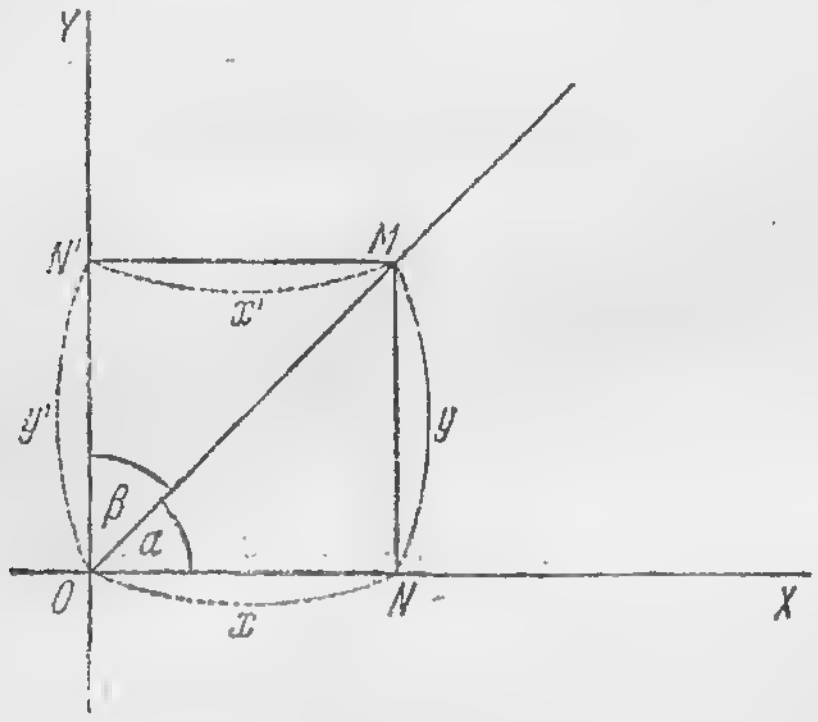


Рис. 21.

Длины отрезков ON' и $N'M$ обозначим соответственно через y' и x'; тогда $x' > x$, $y > y'$. Это следует из того, что прямые NM и ON' расходятся по мере удаления от общего перпендикуляра ON, прямые $N'M$ и ON расходятся по мере удаления от общего перпендикуляра ON'. Аналитически же это вытекает из соотношений, связывающих эти четыре отрезка; эти простые соотношения нам понадобятся, мы их выведем. Как для этих, так и для последующих вычислений необходимо только усвоить тригонометрические уравнения (11a) — (11e).

По теореме косинусов (11e) из прямоугольного треугольника $MN'O$ следует

$$\cos \Pi(y') = \cos \Pi(r) \cos \beta = \cos \Pi(r) \sin \alpha.$$

А по теореме синусов (11a) из треугольника MNO

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(y)}{\operatorname{ctg} \Pi(r)},$$

так что

$$\cos \Pi (y') = \cos \Pi (r) \frac{\operatorname{ctg} \Pi (y)}{\operatorname{ctg} \Pi (r)} = \sin \Pi (r) \operatorname{ctg} \Pi (y).$$

А так как в силу соотношения между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника (11c)

$$\sin \Pi (r) = \sin \Pi (x) \sin \Pi (y), \quad (17)$$

то предыдущее равенство примет вид:

$$\cos \Pi (y') = \cos \Pi (y) \sin \Pi (x). \quad (18)$$

Отсюда ясно, что

$$\cos \Pi (y') < \cos \Pi (y), \quad \Pi(y') > \Pi (y), \; y' < y. \quad (19a)$$

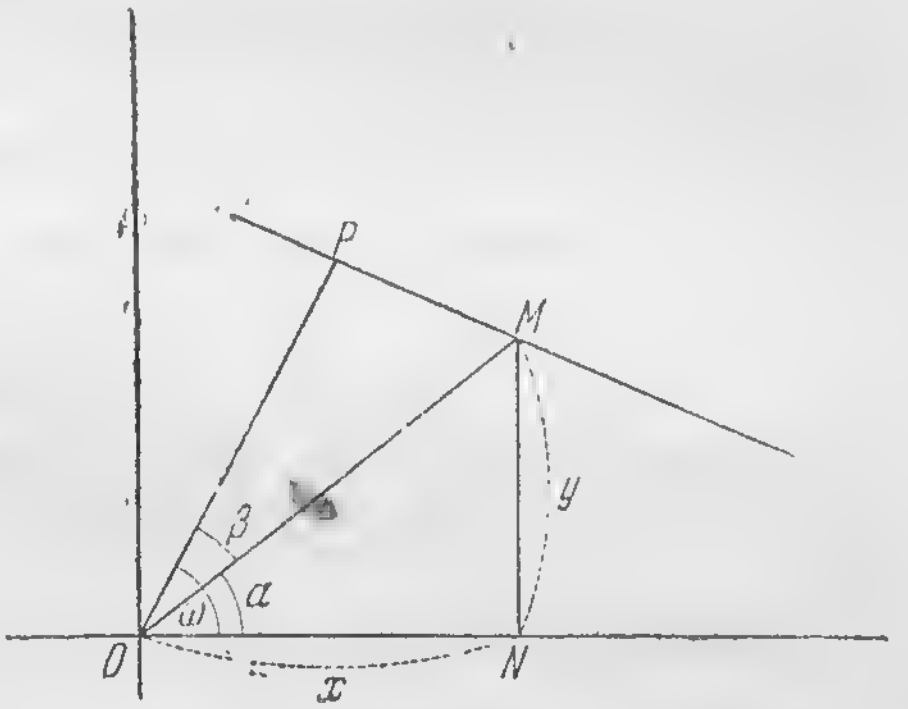


Рис. 22.

Таким же образом найдем, что

$$\cos \Pi (x) = \cos \Pi (x') \sin \Pi (y'), \quad x' > x. \quad (19b)$$

Таким образом, пары чисел (x, y), (x, y'), (y, x'), (y', x') представляют в плоскости Лобачевского существенно различные координаты точки.

Начала аналитической геометрии — выводы уравнений простейших линий — опираются на тригонометрические соотношения. Мы дадим здесь эти выводы, чтобы ввести читателя, интересующегося этим, в вычисления и рассуждения Лобачевского. Тот же треугольник MNO (рис. 21) [теорема тангенсов (11d)] дает

$$\cos \Pi (y) = \operatorname{ctg} \Pi (x) \operatorname{tg} \alpha. \quad (20)$$

Это — уравнение прямой, проходящей через начало координат под углом α к оси абсцисс. Но не трудно вывести и общее уравнение прямой. Положение прямой AB определяется длиной p опущенного на нее из начала перпендикуляра OP (рис. 22) и углом ω, который он образует с осью абсцисс. Длину радиуса-вектора произвольной точки M прямой обозначим через r, углы, на которые он

делит угол ω, обозначим через α и β. Прямоугольный треугольник MOP по теореме косинусов [уравнение (11e)] дает

$$\cos \Pi(p) = \cos \Pi(r) \cos \beta = \cos \Pi(r) \cos (\omega - \alpha) = \\ = \cos \Pi (r) \cos \alpha \cos \omega + \cos \Pi (r) \sin \alpha \sin \omega. \qquad (21)$$

Но в силу той же теоремы косинусов (11e) из треугольника MON следует, что

$$\cos \Pi (r) \cos \alpha = \cos \Pi (x); \qquad (22a)$$

в силу же теоремы синусов (11a)

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \Pi (y)}{\operatorname{ctg} \Pi (r)}; \qquad (22b)$$

подставляя выражения (22a) и (22b) в уравнение (21), после простого преобразования в последнем члене получим:

$$\cos \Pi (p) = \cos \Pi (x) \cos \omega + \sin \Pi (r) \operatorname{ctg} \Pi (y) \sin \omega.$$

В силу же соотношения (17) получаем окончательно

$$\cos \Pi (p) = \cos \Pi (x) \cos \omega + \sin \Pi (x) \cos \Pi (y) \sin \omega. \qquad (23)$$

Это и есть общее уравнение прямой в плоскости Лобачевского в декартовых координатах (x, y). Как видно, оно имеет довольно сложный вид, трансцендентный характер; это обусловливается тем, что декартовы координаты здесь не являются наиболее простыми, даже не являются наиболее подходящими для составления уравнения прямой. Это уравнение получает более простой вид, если пользоваться координатами x и y'. В самом деле, в силу соотношения (18) оно принимает вид

$$\cos \Pi (x) \cos \omega + \cos \Pi (y') \sin \omega = \cos \Pi (p); \qquad (23a)$$

казалось бы, напрашивается дальнейшее упрощение; но от Лобачевского оно ускользнуло и выплыло не скоро.

Еще проще выводится уравнение окружности. Ограничиваясь случаем, когда центром окружности служит начало координат, видим, что тот же прямоугольный треугольник MON приводит для окружности радиуса r к уравнению (17). Лобачевский выводит также уравнение предельной линии.

Вслед за этим Лобачевский переходит к измерению

длин, площадей и объемов. Так как эти вычисления выполняются путем интегрирования, то задача прежде всего сводится к тому, чтобы дать выражения для элементов длины, площади и объема. Эти выражения имеют основное и принципиальное значение; вычисления, которые к ним ведут, не сложны; мы дадим здесь их выводы. Предварительно приведем очень характерные вступительные слова Лобачевского к учению об измерении длин.

«Кривая линия не может быть составлена из прямых, а потому измерение кривой помощию прямой дает только

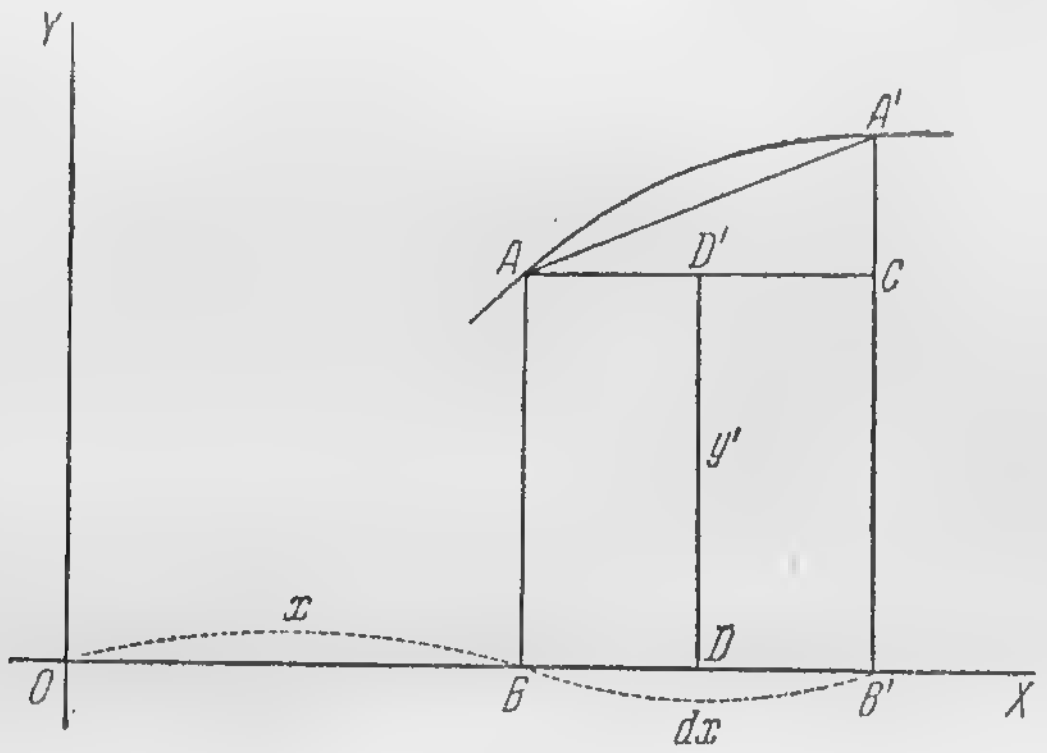


Рис. 23.

условную величину, за которую обыкновенно принимают границу приближения, когда соединяют прямыми точки на кривой, ближе и ближе друг от друга взятые. Легко видеть, какая цель предположена с таким исчислением. Кривые линии измеряются на самом деле помощию цепи, которая, почитают, тем вернее определяет величину кривой, чем звенья менее, так что гибкая нить дает уже эту величину без приметной погрешности. Надобно, следовательно, доказывать только, что граница приближения существует; потом показать, каким образом ее отыскивать».

Немного слов нужно прибавить, чтобы это определение длины кривой удовлетворило современного математика.

Обращаемся теперь к вычислению элемента (дифференциала) длины кривой. Лобачевский рассматривает, как это

делалось в обыкновенной геометрии, две весьма близкие точки кривой A и A' (рис. 23) и исходит из того, что отношение длины дуги AA' к длине ее хорды по самому определению длины кривой стремится к 1, когда та и другая стремятся к нулю. Теперь проектируем точки $A\,(x,\ y)$ и $A'\ (x+dx,\ y+dy)$ на ось абсцисс перпендикулярами AB и $A'B'$. Приращение BB' абсциссы обозначаем через dx. Откладываем на $B'A'$ отрезок $B'C = BA$, так что отрезок CA' дает соответствующее приращение ординаты dy; отрезок же AC обозначим через dx'. Четырехугольник $ABB'C$ существенно отличается от прямоугольника евклидовой плоскости. Углы при основании BB' прямые, но при основании AC они острые, ибо они равны, а сумма их меньше $2d$. Вместе с тем $dx' > dx$, ибо перпендикуляры AB и $A'B'$ к оси абсцисс расходятся по мере удаления от нее. Если соединим середины D и D' оснований BB' и AC этого четырехугольника, то легко усмотреть, что прямая DD' перпендикулярна как к BB', так и к CA. Вместе с тем четырехугольник $DD'CB'$ по своему строению не отличается от четырехугольника $ON'MN$ на рис. 21; отрезки $DB' = \frac{1}{2}\,dx$ и $D'C = \frac{1}{2}\,dx'$ здесь заменяют x и x' рисунка 21. Соотношение (19b) поэтому дает:

$$\cos \Pi\left(\frac{1}{2}\,dx\right) = \cos \Pi\left(\frac{1}{2}\,dx'\right)\sin \Pi\,(y'),$$

где y' — отрезок DD'. Но поскольку отрезки dx и dx' бесконечно малы, предыдущее соотношение в силу приближенных значений (16a) принимает вид

$$dx = dx' \sin \Pi\,(y').$$

Если отрезок dx стремится к нулю, то y' явно стремится к y, и отношение $dx' : dx$ стремится к пределу $1/\sin \Pi\ y)$. Поэтому с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$dx' = \frac{dx}{\sin \Pi\,(y)}. \tag{24}$$

С другой стороны, когда dx стремится к нулю, то каждый из углов при вершинах A и C нашего четырехугольника стремится к d. Мы можем рассматривать ACA' как прямоугольный треугольник с бесконечно малыми сторонами.

Обозначая AA' через ds, будем соответственно этому иметь

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}, \text{ или } ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}}, \qquad (25)$$

или в силу значения, которое $\sin\Pi(y)$ имеет по формуле (15),

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{4}\left(e^{\frac{y}{k}} + e^{-\frac{y}{k}}\right)^2. \qquad (25a)$$

Дифференциальная форма (25) представляет собою явное обобщение основной метрической формы евклидовой плоскости. В самом деле, в евклидовой геометрии $\Pi(y) = d$, и предыдущая форма принимает вид, который метрическая форма имеет в классической геометрии,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \qquad (25b)$$

Из основной формы (25), конечно, должна разматываться вся метрическая геометрия плоскости. Лобачевский ею пользуется прежде всего для вычисления длины окружности. Он преобразовывает для этого выражение (25) к полярным координатам r, ω и получает

$$ds^2 = dr^2 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(r)\, d\omega^2. \qquad (26)$$

В случае окружности, центр которой совпадает с началом, r имеет постоянное значение; формула дает

$$ds = k \operatorname{ctg} \Pi(r)\, d\omega, \qquad (27)$$

а интегрирование дает длину окружности

$$c = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(r). \qquad (28)$$

Располагая уравнением предельной линии, Лобачевский вычисляет длину предельной дуги по ее хорде. Обозначая длину предельной дуги (рис. 24) через $2l$, а ее хорду через $2r$, Лобачевский находит:

$$l = k \operatorname{ctg} \Pi(r). \qquad (29)$$

Если дугу ACB будем вращать вокруг серединной оси OO', то она опишет предельную поверхность, а ее концы опишут окружность радиуса r; но эту окружность можно рассматривать так же, как окружность на предельной поверхности с центром в точке O и геодезическим радиусом l.

А так как на предельной поверхности имеет место геометрия Евклида, то длина этой окружности

$$c = 2\pi l = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{k}\right).$$

Это совпадает с выражением (28). Такое совпадение результатов всегда дает Лобачевскому особенное удовлетворение, так как утверждает его в убеждении логической правильности построенной им геометрии.

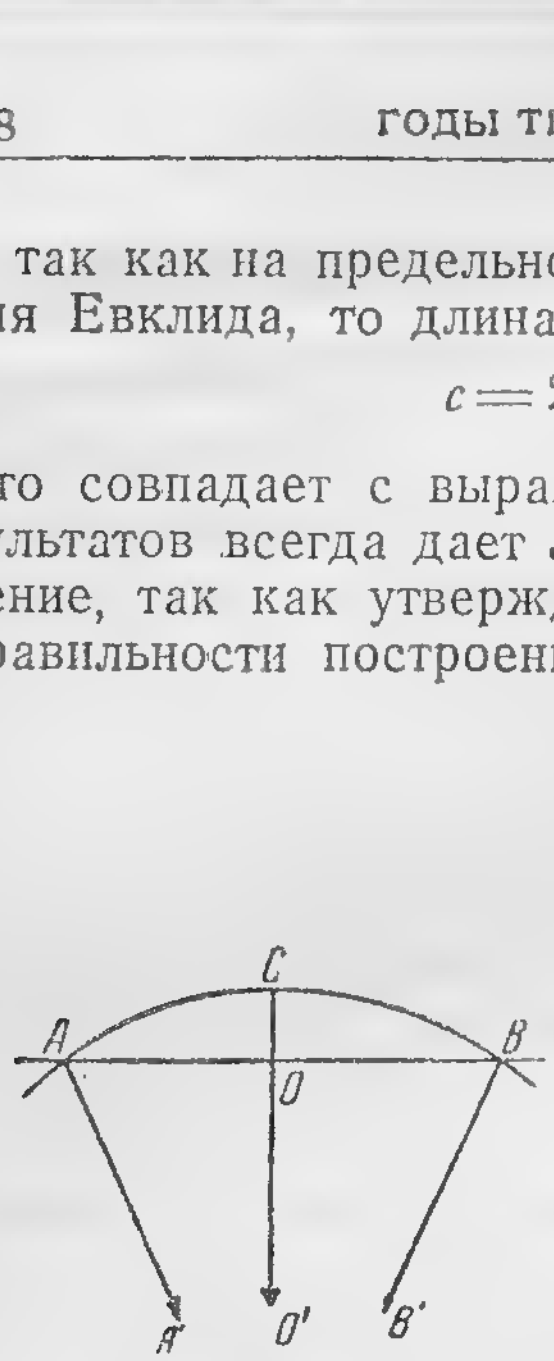


Рис. 24.

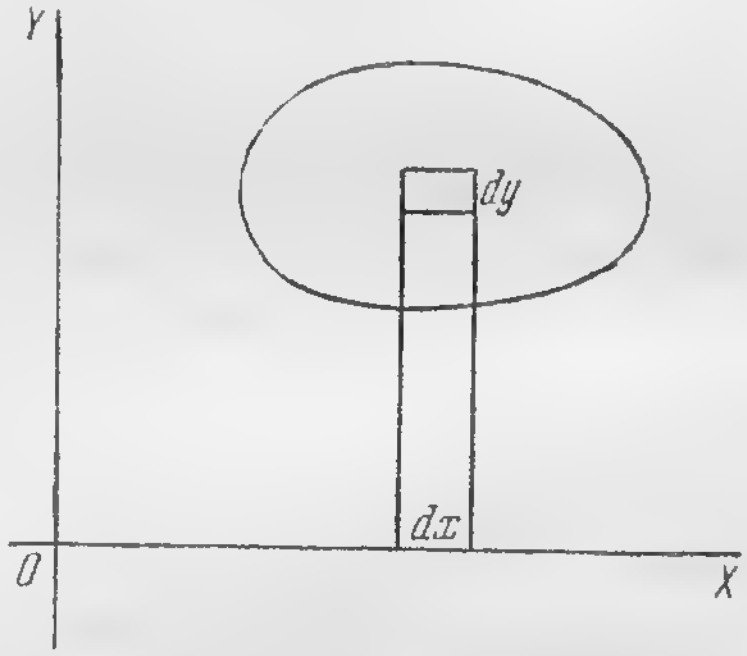


Рис. 25.

Следующий шаг заключается в вычислении элемента $d\sigma$ площади. Принимая за таковой площадку (рис. 25), соответствующую наращению абсциссы на dx и ординаты на dy, Лобачевский исходит из того, что эту площадку можно рассматривать как прямоугольник в евклидовой плоскости со сторонами dx' и dy; ее площадь $d\sigma$ равна поэтому $dx'dy$, а вследствие соотношения (24)

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\sin \Pi(y)}; \qquad (30)$$

двойное интегрирование в надлежащих пределах дает выражение площади измеряемой фигуры. И эта формула совпадает с евклидовой при $\Pi(y) = d$. Лобачевский с большим искусством выполняет интегрирование выражения (30) прежде всего в применении к треугольнику и приходит к заключению, что площадь треугольника пропорциональна угловому дефекту, т. е. разности между $2d$ и суммой углов треугольника; при надлежащем выборе единицы площади она выражается непосредственно этой разностью. Но Лобачевский показывает, что к этому резуль-

тату можно притти элементарными синтетическими рассуждениями и вновь констатирует совпадение результатов.

Разбивая многоугольник на треугольники, легко получить, что площадь многоугольника пропорциональна его угловому дефекту, т. е. разности

$$2d(n-2)-S, \tag{31}$$

где S — сумма внутренних его углов; площадь непосредственно выражается этой разностью при надлежащем выборе единицы для измерения площадей. Располагая выражением для площади многоугольника, можно, следуя обычному замыслу, вычислить площадь круга. Выполняя это также прямым интегрированием, Лобачевский вновь констатирует совпадение результатов.

Для координации точки M в пространстве Лобачевский пользуется обыкновенно расстоянием z точки от плоскости xoy, абсциссой x и ординатой y ее проекции на эту плоскость (рис. 26). Элемент объема можно рассматривать как прямоугольный параллелепипед со сторонами $MM' = dz$,

$$MQ = \frac{AB}{\sin \Pi(\overline{AM})} = \frac{dy}{\sin \Pi(z)} \quad \text{и} \quad MN = \frac{AD}{\sin \Pi(\overline{AM})} = \frac{dx}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}.$$

Поэтому элемент объема

$$dv = \frac{dx\,dy\,dz}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}. \tag{32}$$

Нет нужды подчеркивать, что при $\Pi(y) = \Pi(z) = d$ формула переходит в обыкновенное евклидово выражение элемента объема.

Выражение элемента объема Лобачевский приспособляет для вычисления объемов тел вращения; он находит следующее выражение для объема круглого конуса:

$$v = \pi(l \cos C - h), \tag{33}$$

где l — образующая, h — высота конуса, а c — угол между высотой и образующей. Если из круглого конуса возьмем вырезок (рис. 27), который высекается двумя плоскостями, проходящими через ось и образующими угол ω, то его объем получим, умножая выражение (33) на $\omega/2\pi$

$$v = \frac{\omega}{2}(l \cos C - h). \tag{33а}$$

Предполагается, что угол ω выражен в единицах, в которых прямой угол выражается числом $\pi/2$.

Это дает возможность вычислить объем любого конуса. Если через перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, будем проводить плоскости и через

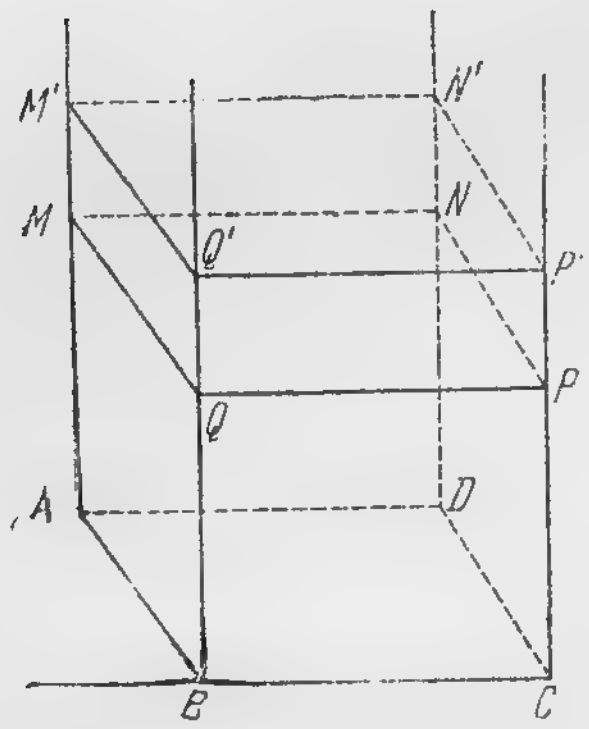


Рис. 26.

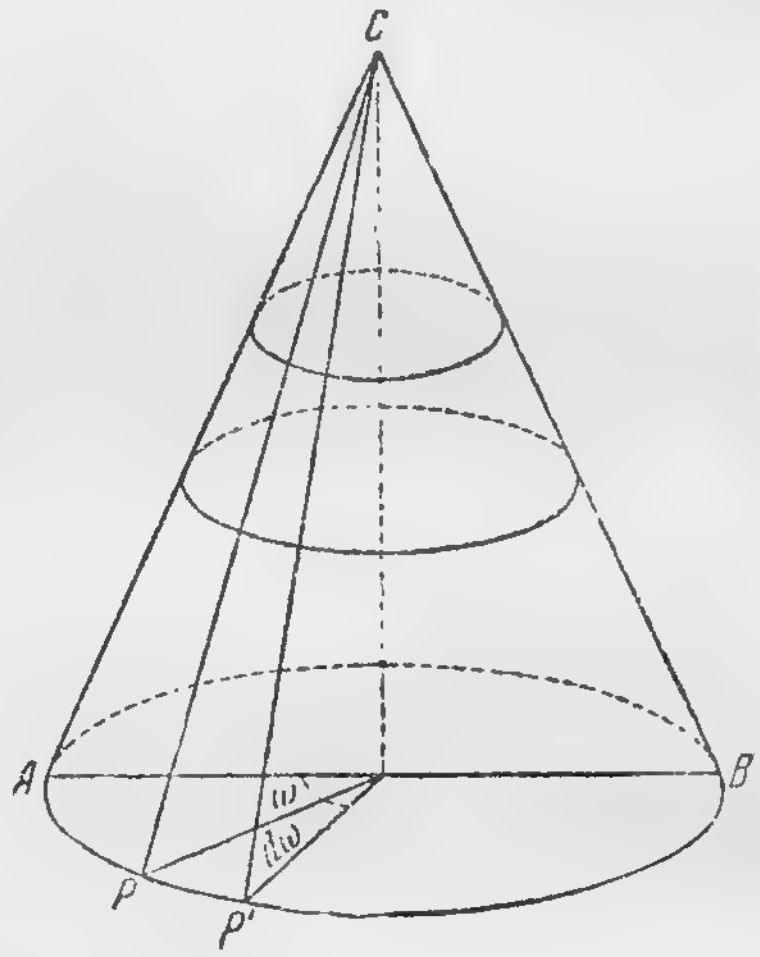


Рис. 27.

ω будем обозначать азимут, отсчитываемый от одной из этих плоскостей (рис. 28), то l и C будут функциями от ω. Объем бесконечно малого вырезка будет иметь значение

$$\frac{1}{2}[l(\omega)\cos C(\omega) - h]\,d\omega, \tag{33b}$$

а объем всего конуса выразится интегралом

$$v = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[l(\omega)\cos C(\omega) - h]\,d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} l\cos C\,d\omega - \pi h \tag{34}$$

(в предположении, что высота падает внутрь конуса). Однако это выражение отнюдь не столь простое, каким оно на первый взгляд кажется. Дело в том, что l, C и ω — величины, связанные зависимостью (11e)

$$\cos\Pi(h) = \cos\Pi(l)\cos C. \tag{35}$$

Если формулу (34) выразить только через C и l, как это во многих случаях необходимо, или через C и h, то она значительно осложнится.

На всякую пирамиду можно также смотреть как на конус с переменными значениями l и C, зависящими от ω. Руководясь этим, Лобачевский вычисляет объем любой пирамиды, рассматривая ее как конус, основанием которого служит многоугольник, в частности, треугольник, если речь

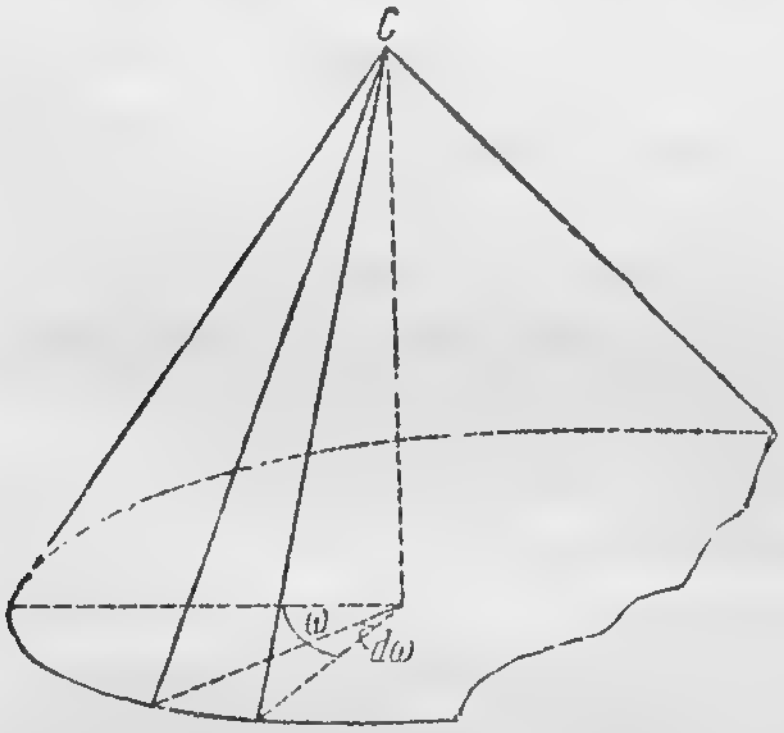


Рис. 28.

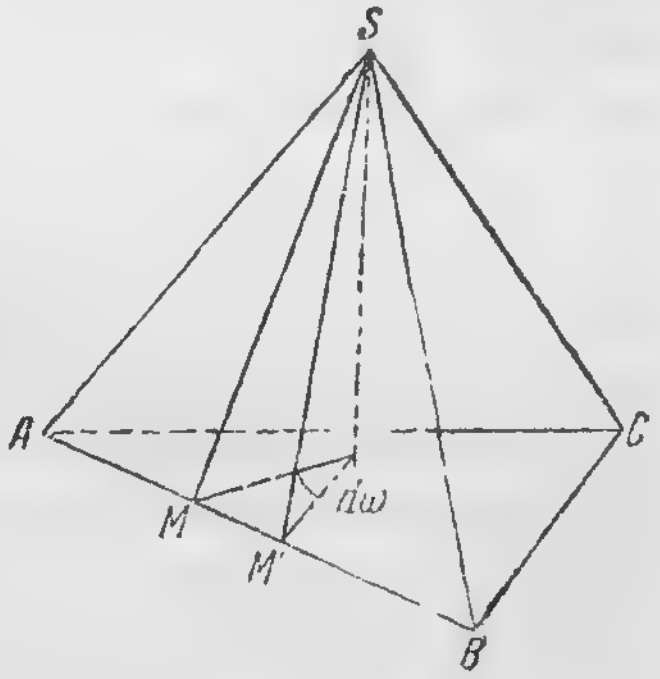


Рис. 29.

идет о тетраэдре (рис. 29). В последнем случае, в зависимости от выбора основания, мы получаем для объема тетраэдра различные интегральные выражения; иногда тот или иной из этих интегралов поддается вычислению; и тогда этим определяются значения остальных интегралов, выражающих тот же объем. Если ни один из интегралов не раскрывается, то мы приходим к различным интегралам, имеющим то же значение; мы получаем формулы, иногда очень интересные, для преобразования одного интеграла в другой.

В более общем виде основной замысел Лобачевского заключается в следующем. Тот или иной интеграл часто удается интерпретировать в виде значения некоторой длины, площади или объема в воображаемой геометрии. Между тем иногда это значение удается разыскать при помощи чисто геометрических соображений, основанных на новой геометрии; этим путем средствами воображаемой геометрии устанавливается значение определенного интеграла. Но более того, нередко, когда значение интеграла уже

найдено, те же геометрические соображения дают указания, как разыскать значение того же интеграла чисто аналитическими средствами. Получается возможность проверить результат, который найден при помощи соображений, основанных на неевклидовой геометрии. Совпадение результатов часто вызывает у Лобачевского, как говорит один из его комментаторов,[1] «наивную радость по поводу подтверждения правильности его геометрии, завоеванного путем сложных вычислений».

К такому же результату Лобачевский часто приходит, выражая интеграл, имеющий то или иное геометрическое значение, в различных координатах. Методы координации, как мы уже имели случай видеть, в неевклидовой геометрии особенно многообразны; переходя от одной координации к другой, Лобачевский иногда находит значение сложного определенного интеграла, иногда приводит одни интегралы к другим. Он дает таким образом приложение воображаемой геометрии к анализу. Мемуар заканчивается таблицей, содержащей «сравнение интегралов и найденные вновь определенные интегралы».

Впрочем, в самом заключении Лобачевский отмечает еще один очень важный факт. Уравнения тригонометрии (11a) — (11c) можно, пользуясь выражениями (15) тригонометрических функций от угла $\Pi(x)$, записать в таком виде:

$$\begin{aligned} e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}} &= (e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}) \sin A, \\ e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}} &= (e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}) \sin B, \\ e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}} &= \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}) (e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}). \end{aligned} \tag{36}$$

Сопоставим их с уравнениями сферической тригонометрии, — точнее, с уравнениями, связывающими катеты a, b, гипотенузу c и острые углы A, B прямоугольного сферического треугольника, т. е. с уравнениями (10a) — (10c).

В них под a, b и c нужно разуметь угловые значения сторон сферического треугольника; если a, b и c означают длины этих сторон, то в тех же уравнениях нужно

---

[1] H. Liebmann. N. I. Lobatschefskij. Imaginaire Geometrie. Leipzig, 1904, стр. VII.

заменить a, b и c через $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ где r — радиус сферы; если, сверх того, выразим тригонометрические функции при помощи известных формул Эйлера, то представим уравнения прямоугольного сферического треугольника в виде:

$$e^{\frac{ai}{r}} - e^{-\frac{a}{r}} = (e^{\frac{ci}{r}} - e^{-\frac{ci}{r}}) \sin A,$$
$$e^{\frac{bi}{r}} - e^{-\frac{bi}{r}} = (e^{\frac{ci}{r}} - e^{-\frac{ci}{r}}) \sin B, \qquad (36a)$$
$$e^{\frac{ci}{r}} + e^{-\frac{ci}{r}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{ai}{r}} + e^{-\frac{ai}{r}})(e^{\frac{bi}{r}} + e^{-\frac{bi}{r}}).$$

Сличая уравнения (36) и (36а), видим, что первые получаются из последних, если в них заменить r через ki. Тригонометрические уравнения геометрии Лобачевского получаются из уравнений сферической геометрии заменой радиуса сферы r через ki. Планиметрия Лобачевского формально может быть рассматриваема как геометрия мнимой сферы.

Совокупность всех этих фактов в глазах Лобачевского уже исключала всякую возможность возникновения какого-либо противоречия в открытой им геометрии. Вот как он сам выражает эту мысль в заключении мемуара.

«После того, как мы нашли уравнения (17),[1] которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собой и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу; итак, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противоречие принудит впоследствии опровергнуть начала, принятые нами в этой новой геометрии, то это противоречие может только скрываться в самых уравнениях (17). Заметим, однакож, что эти уравнения переменяются в (20)[2] сферической тригонометрии, как скоро, вместо боков a, b, c, ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но в обыкновенной геометрии и

[1] У нас уравнения (11).
[2] У нас (10).

в сферической тригонометрии везде входят одни содержания линий: следовательно, обыкновенная геометрия, тригонометрия и эта новая геометрия всегда будут согласны между собой.

Если теперь аналитика с новой — назовем *воображаемой* геометрией, в отличие от *употребительной* — соглашены уже между собою, то можно ожидать от той и другой взаимного пособия. Это ожидание кажется не без основания, и после того как предположивши собственно достигнуть только одной цели — дать общие правила для измерения всех геометрических величин, — идя прямо к этой цели и дозволивши себе мимоходом только некоторые применения, мы были в состоянии открыть значения определенных интегралов, к познанию которых одной аналитике, без пособия геометрии, трудно было бы проложить дорогу».

Итак, мемуар «О началах геометрии» содержит не только основы новой геометрии, которые нашли уже себе место в «Exposition succincte», но и далеко идущее ее развитие: начала аналитической геометрии и метрики, устанавливаемой инфинитезимальными средствами. По существу, к этому уже немного оставалось прибавить. Мемуар содержит также приложения новой геометрии к разысканию определенных интегралов и вычисления, имеющие главной своей целью подтвердить логическую правильность этой геометрии.

Была создана новая наука, охватывающая все вопросы метрической геометрии; старая же геометрия Евклида вошла в эту геометрию как простейший частный, можно сказать, как предельный ее случай.

XVI. Критики

Рассуждение «Exposition succincte» не увидело света, более того, оно безвозвратно утеряно. Но мемуар «О началах геометрии», содержавший все, что было изложено в этом рассуждении, и далеко развернутые выводы, был опубликован. Новая созданная Лобачевским геометрия почти во всем ее объеме была представлена на суд ученых. Слово было предоставлено критике. Мы видели, что рассуждение «Exposition succincte» не встретило сочувствия математиков, которым оно было передано на отзыв; но рецензенты предпочли от этого отзыва уклониться.

Новый мемуар сделался достоянием всех математиков, критика не замедлила появиться. В 1834 г. в журналах «Сын отечества» (№ 41) и «Северный архив», которые издавали Н. Греч и Ф. Булгарин, появилась статья, подписанная буквами С. С.: «О началах геометрии, соч. Г. Лобачевского». Это был не отзыв, а скорее грубый пасквиль, весь пропитанный издевательством. Приводим этот пасквиль, хотя бы в наиболее важной его части; делаем это потому, что для Лобачевского он в настоящее время не может быть оскорбительным, — он роняет только достоинство тех, кто его писал и печатал. А между тем по этому отзыву читатель может вполне судить о той горькой чаше, которую суждено было испить гениальному творцу неевклидовой геометрии.

«Есть люди, которые, прочитав иногда книгу, говорят: она слишком проста, слишком обыкновенна, в ней не о чем и подумать. Таким любителям думанья советую прочесть геометрию г. Лобачевского. Вот уж подлинно есть о чем подумать. Многие из первоклассных наших математиков читали ее, думали и ничего не поняли. После сего уже не считаю нужным упоминать, что и я, продумав над сею книгой несколько времени, ничего не придумал, т. е. не понял почти ни одной мысли. Даже трудно было бы понять и то, каким образом г. Лобачевский из самой легкой и самой ясной в математике, какова геометрия, мог сделать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое учение, если бы сам он отчасти не надоумил нас, сказав, что его Геометрия отлична от у п о т р е б и т е л ь н о й, которой все мы учились и которой, вероятно, уже разучиться не можем, а есть только в о о б р а ж а е м а я. Да, теперь все очень понятно. Чего не может представить воображение, особливо живое и вместе уродливое! Почему не вообразить, например, черное — белым, круглое — четырехугольным, сумму всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых и один и тот же определенный интеграл равным то $\pi/4$, то ∞? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно. Но спросят: для чего же писать, да еще и печатать такие нелепые фантазии? Признаюсь, на этот вопрос отвечать трудно. Автор нигде не намекнул на то, с какой целью он напечатал сие сочинение, и мы должны, следовательно, прибегнуть к догадкам. Правда, в одном месте он ясно говорит, что будто бы недостатки, замеченные им в употребляемой доселе геометрии, заставили его сочинить и издать эту новую геометрию; но это, очевидно, несправедливо, и по всей вероятности, сказано для того, чтобы еще более скрыть настоящую цель сего сочинения. Во-первых, это противоречит тому, что сказал сам же автор о своей геометрии, т. е., что она в природе вовсе не существует, а могла существовать только в его воображении и для измерений на самом деле остается совершенно без употребления; во-вторых, это действительно противоречит всему тому, что в ней содержится, и судя по чему, скорее можно согласиться на то, что новая геометрия выдумана для опровержения прежней, нежели для пополнения оной.

При том же, да позволено нам будет несколько коснуться личности. Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьезной целью книгу, которая немного принесла бы чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель; а в новой Геометрии нередко недостает и сего последнего. Соображая все сие, с большой вероятностью заключаю, что истинная цель, для которой г. Лобачевский сочинил и издал свою Геометрию, есть просто шутка, или, лучше, сатира на ученых математиков, а может быть, и вообще на ученых сочинителей настоящего времени. За сим, и не с вероятностью только, а с совершенной уверенностью полагаю, что безумная страсть писать каким-то странным и невразумительным образом, весьма заметная с некоторого времени во многих из наших писателей и безрассудное желание открывать новое при талантах, едва достаточных для того, чтобы надлежащим образом постигать старое, суть два недостатка, которые автор в своем сочинении намерен был изобразить и изобразил, как нельзя лучше.

Во-вторых, новая Геометрия, как я уже упомянул о том выше, написана так, что никто из читавших ее почти ничего не понял. Желая покороче познакомить вас с нею, я собирал в одну точку все мое внимание, приковывая его к каждому периоду и каждому слову и даже к каждой букве, и при всем том так мало успел прояснить мрак, кругом облегающий это сочинение, что едва в состоянии рассказать вам то, о чем в нем говорится, не говоря ни слова о том, что говорится. Сперва, как обыкновенно водится, излагаются главные понятия о пространстве и его измерениях. Разумеется, что эти понятия совершенно отличны от понятий обыкновенных и изложены особенным образом. Угодно вам прочесть хоть некоторые из них в подлинике? Извольте».

За этим следует большая выдержка из первых страниц мемуара «О началах геометрии», потом автор «рецензии» продолжает:

«Но, извините, я не могу выписать до слова то, что ниже излагается, потому что уже и так много выписал; а рассказать в коротких словах не умею, ибо отсюда-то и начинается самое непонятное. Кажется, что после нескольких определений, с таким же искусством и такою же точностью составленных, как и предыдущие, автор говорит что-то о треугольниках, о зависимости в них углов от сторон, чем главным образом и отличается его геометрия от нашей, потом предлагает новую теорию параллельных, которая, по собственному его признанию, находится или нет в природе, никто доказать не в состоянии; наконец следует рассмотрение того, каким образом в этой воображаемой геометрии определяется величина кривых линий, площадей, кривых поверхностей и объемов тел, — и все это, еще раз повторяю, написано так, что ничего и понять невозможно.

Во-вторых, в конце книги г. Лобачевский поместил два определенных интеграла, которые он открыл мимоходом, идя прямо к своей цели — дать общие правила для измерения всех геометрических величин, и дозволивши себе только некоторые применения. Открытие весьма замечательное! Ибо один из сих новых интегралов уже давно известен и находится гораздо легчайшим образом, другой совершенно неверен, потому что влечет к той нелепости, которую мы

уже заметили выше, «т. е. что один и тот же определенный интеграл равен то $\pi/4$, то ∞. Но не таковы ли на самом деле большею частью бывают прославленные у нас новооткрытия? Не часто ли случается, что старое, представленное только в каком-нибудь новом, странном образе, выдают нам за новое, и новое, но ложное, за чрезвычайно важное открытие. Хвала г. Лобачевскому, принявшему на себя труд объяснить, с одной стороны, наглость и бестыдство ложных новоизобретателей, а с другой стороны, простодушное невежество почитателей их новоизобретений.

Но, сознавая всю цену сочинения г. Лобачевского, я не могу однакож, не попенять ему за то, что он, не дав своей книге надлежащего заглавия, заставил нас долго думать понапрасну. Почему бы, вместо заглавия «О началах геометрии», не написать, например, сатира на геометрию, карикатура на геометрию или что-нибудь подобное? Тогда бы всякий, с первого взгляда видел бы, что это за книга, и автор избежал бы множества невыгодных для него толков и суждений. Хорошо, что мне удалось проникнуть в настоящую цель, с которой написана эта книга, а то, бог знает, что бы об ней и об ее авторе думали. Теперь же я думаю и даже уверен, что почтенный автор почтет себе весьма мне обязанным за то, что я показал истинную точку зрения, с которой должно смотреть на его сочинение. С. С.».

Останавливаться на этом памфлете, делать возражения в настоящее время не приходится. Нужно только представить себе, какое впечатление он произвел в Казани, особенно в профессорской среде, в которой было достаточно людей, недоброжелательно относившихся к Лобачевскому. Нужно только представить себе, что должен был пережить Лобачевский, прочитав эту статью. Вот что он писал в подстрочном примечании в следующем своем мемуаре: «В № 41 журнала «Сын отечества» 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и надеюсь, совершенно несправедливая. Рецензент основал свой отзыв на том только, что он моей Теории не понял, и почитает ее ошибочной, потому что в примерах встречает один *нелепой* интеграл. Впрочем такого интеграла не нахожу я в моем сочинении. В ноябре месяце прошедшего года послал я к Издателю ответ, который однакож, не знаю почему, до сих пор, в продолжении пяти месяцов, еще не напечатан».

Кто несет ответственность за появление этой «критики» этого грубого пасквиля? Конечно, прежде всего редакция журнала «Сын отечества». Это был период, когда журналом руководили небезызвестные Ф. В. Булгарин и М. Н. Греч, этот «безпринципный дуумвират», который субсидировался так называемым «третьим отделением»

(тайной политической полицией). Они имели своеобразную монополию литературного слова, о которой А. С. Пушкин говорил: «Русская словесность головой выдана Булгарину и Гречу». И эти люди, к которым писательская среда того времени относилась с негодованием и презрением, жестоко третировали молодого русского ученого, — а их среди наших математиков того времени было немного, — беззастенчиво третировали ректора одного из немногих еще в то время русских университетов. Тон этой «критики» был совершенно недопустим, был недостоин серьезного журнала, впрочем, может быть, был вполне достоин Булгарина и Греча.

Но кто же был автор этой критики, укрывавшийся за никому не известным псевдонимом, за инициалами С. С.? Вот что пишет об этом А. П. Котельников, под редакцией и с комментариями которого мемуар «О началах геометрии» появляется в I томе «Полного собрания» Н. И. Лобачевского. Котельников, впрочем, цитирует А. В. Васильева по его неизданной биографии Лобачевского. «Этот вопрос не мог не интересовать и почитателей Лобачевского и лиц, интересующихся историей русской математической науки. У них составилось мнение, что статья была написана академиком М. В. Остроградским.[1] Так, например, В. В. Бобынин в своем очерке «Биография Остроградского», помещенном в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, говорит об «оскорбительных насмешках» Остроградского над Н. И. Лобачевским, ничем не доказывая эту фразу. По моему мнению, статья написана не Остроградским, но лицом, близким к нему. Таким лицом был С. А. Бурачек. Он был сотрудником журнала «Сын отечества», с 1831 года он преподавал в офицерских классах морского кадетского корпуса, высшем учебном заведении, в котором преподавал и Остроградский. Там же преподавал и С. И. Зеленый, читавший также в Петербургском университете лекции по высшей математике, впоследствии директор Гидрографического департамента. Бурачек и Зеленый издали известные лекции Остроградского по алгебраическому и трансцендентному анализу.[2]

---

[1] М. В. Остроградский с 1830 г. занимал в Академии кафедру прикладной математики, с 1835 г. — кафедру чистой математики.

[2] Эти лекции в настоящее время переизданы: они вошли в состав «Полного собрания сочинений» М. В. Остроградского.

Как сотрудник «Сына отечества», Бурачек отличался своими резкими нападками на современную ему литературу, которая была для него произведением «ватаги разбойников». Его бойкое перо не щадило и Пушкина, все герои которого, по его словам, были «уголовными преступниками». В библиотеке Семиколенова я нашел его статью, содержащую восторженный отзыв о лекции Остроградского; стиль этого отзыва напоминает стиль хлесткой статьи о Лобачевском. Для меня несомненно, что эта статья написана Бурачеком, может быть вместе с Зеленым (чем объясняется и псевдоним С. С.),[1] и, весьма вероятно, не без ведома Остроградского. На это указывает то место статьи, где говорится о новых интегралах».

А. П. Котельников справедливо указывает, что высказанное А. В. Васильевым предположение о влиянии Остроградского на отрицательное отношение к работам Н. И. Лобачевского подтверждается протоколами Академии Наук, хранящимися в ее архиве.

В 1832 г. совет Казанского университета (ректором которого был тогда Н. И. Лобачевский) направил в Академию Наук напечатанный в «Казанском вестнике» мемуар «О началах геометрии». Собрание конференции Академии, которой представлен был этот труд, в заседании 5 сентября постановило дать его академику Остроградскому для словесного отзыва. В заседании 31 октября М. В. Остроградский доложил, что исполнил поручение Академии и просмотрел работу Н. И. Лобачевского. Протоколы Академии в то время составлялись на французском языке. Вот перевод той части протокола, которая содержит отзыв Остроградского.

«Указав на то, что из двух определенных интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует г. Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи интегрального исчисления, а другой неверен, г-н Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что большая часть ее непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд г-на Лобачевского не заслуживает внимания Академии».

Связь между статьей в «Сыне отечества» и отзывом Остроградского видна хотя бы из того, что оба рецензента единодушно отмечают наличие двух интегралов, из кото-

[1] С. А. Бурачек и С. И. Зеленый.

рых «один находится гораздо легчайшим образом, другой совершенно неверен». Что это за неверный интеграл, который равен то $\pi/4$, то ∞ ? Некоторое разъяснение этого приносит замечание Лобачевского, сделанное им в мемуаре «Воображаемая геометрия». Он занимается вычислением объема круглого конуса, в котором образующие параллельны высоте и составляют с плоскостью основания угол α; вершину этого конуса, таким образом, можно представлять себе в бесконечно удаленной точке схождения параллельных образующих. Геометрические соображения приводят к равенству (111) (по нумерации в мемуаре)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \lg (1 - \sin \alpha^2 \cos \omega^2) = 2\pi \lg \left(\cos \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Если положим

$$\cos \alpha = \frac{1-a}{1+a} \quad \text{и} \quad \vartheta = 2\omega,$$

то простое вычисление дает

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \lg (1 + a^2 - 2a \cos \vartheta) = 0.$$

Мы приходим, таким образом, к интегралу, содержащему параметр a; но значение его от a не зависит, а постоянно равно нулю. Сделанное, однако, допущение существенно предполагает $a < 1$. Для $a > 1$ полагаем

$$\cos \alpha = \frac{a-1}{a+1}$$

и тогда

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \lg (1 + a^2 - 2a \cos \vartheta) = 2\pi \lg a.$$

Один и тот же интеграл при положительных значениях a может, таким образом, иметь два значения: при $a < 1$ он равен нулю, при $a > 1$ он равен $2\pi \lg a$. Лобачевский указывает, что этот интеграл был найден уже Пуассоном. Что критики считали этот результат нелепым, можно объяснить только их собственным невежеством. Лобачевский это и отмечает следующим подстрочным примечанием.

«Другие примеры, каким образом одному интегралу могут принадлежать различные значения, находим тоже у Г. Пуассона (Mémoires sur le calcul num. des intégr. définis. Mémoires de l'Acad. de scien. de l'Inst. de France. 1823, p. 601). Тут можно видеть интеграл, который бывает вместе 0 и 2. Если что-нибудь подобное из моих интегралов вывел и тот, кто написал в № 41 «Сына Отечества» 1834 г. критику на мое сочинение *о началах Геометрии*, то или должен быть он несведущ, или по крайней мере слишком поспешен в своем суждении, неразличая тех случаев, когда интегралу принадлежат различные значения, и называя их *нелепыми*». Факт, на котором настаивал Лобачевский, уже очень скоро после появления его мемуара стал тривиальным (интегралы Дирихле и др.).

Естественно возникает вопрос, чем обусловливался отзыв Остроградского. Ни в недостаточной компетентности, ни в недостаточной добросовестности М. В. Остроградского ни в коем случае обвинить нельзя.

Известную ответственность за такой ход событий несомненно несет и сам Лобачевский. Работа «О началах геометрии» изложена настолько сжато, так трудна для чтения, что понять ее в этом виде действительно вряд ли было возможно. Обычай излагать свои исследования чрезвычайно сжато давно утвердился в математической среде; но Лобачевский вышел в этом деле за пределы допустимого. Вот что пишет об этом профессор А. П. Котельников в предисловии к упомянутому уже изданию мемуара «О началах геометрии».

«Чтение этой работы для всякого, кто в первый раз начинает знакомиться с «воображаемой геометрией» Лобачевского, представляет громадные и, пожалуй, даже непреодолимые трудности. Самое расположение материала при изложении основных геометрических понятий, совершенно новая постановка задачи теории параллельных линий, новые результаты, не вяжущиеся с обычными геометрическими представлениями, и необходимость составить себе совершенно новые геометрические образы, излишние и даже ложные с точки зрения геометрии Евклида, — все это уже по существу затрудняет понимание «воображаемой геометрии». Но кроме этих трудностей, которые коренятся в существе самого предмета, на пути читателя Лобачевский воздвиг еще и новые трудности. Первая часть «О началах геометрии», в которой как раз

и находится все наиболее существенное для понимания его «воображаемой геометрии», не содержит почти никаких доказательств, написана чрезвычайно сжато и носит характер лишь краткого конспекта. Хотя изложение во второй и третьей частях более подробно, но все же и оно отличается излишней краткостью. Многие довольно длинные промежуточные вычисления опущены. В особенности затруднительны выкладки в последней части, причем иногда перемена обозначений способна привести читателя в совершенное отчаяние. К этому нужно еще добавить, что в «Казанском вестнике» были допущены довольно многочисленные опечатки, затрудняющие чтение».

Этого мнения придерживаются и все проштудировавшие этот мемуар. Гаусс, который, как мы увидим ниже, первый уяснил себе идеи Лобачевского, заинтересовался его работами настолько, что изучил русский язык для того, чтобы в подлиннике с ними познакомиться. Он писал, что сочинения Лобачевского «можно уподобить запутанному лесу, через который нельзя найти дороги, не изучив предварительно каждого дерева».[1]

Мемуар о «Началах геометрии» был переведен на немецкий язык профессором Ф. Энгелем; он снабдил его обстоятельными примечаниями, которые по размерам превышают текст Лобачевского. Но и для него остались некоторые места неясными. А. П. Котельников первый расшифровал текст Лобачевского до конца, не оставив ни одного невыясненного утверждения; это потребовало большого исследовательского труда и составило высокую заслугу в деле разъяснения сочинений Лобачевского.

«И в настоящее время, — пишет А. П. Котельников, — читатель, который приступил бы к чтению этого сочинения, еще не владея основами неевклидовой геометрии, встретил бы, можно сказать, непреодолимые затруднения. Именно поэтому редакционная коллегия настоящего издания[2] сочла необходимым дать раньше место сочинению «Геометрические исследования по теории параллельных линий».[3] Именно поэтому и мы поместили здесь обзор

---

[1] Письмо к Герлингу от 8/II 1844 г. см. C. F. Gauss, Gesammelte Werke, т. VIII, стр. 237.

[2] Ныне выпускаемого полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского.

[3] Исходя из этих же соображений, в настоящее время Издательство Академии Наук СССР выпускает его отдельным изданием.

«Геометрических исследований», нарушая хронологическую последовательность сочинений Лобачевского.

Поскольку это сделано, будет уместно здесь привести и отзыв о «Геометрических исследованиях», появившийся в немецкой литературе. Он помещен в известном библиографическом издании «Gersdorfs Repertorium» за 1840 г.[1] Вот перевод этого отзыва: «По утверждению автора можно принять, не впадая в противоречие, что через данную точку к данной прямой можно провести две несовпадающие параллельные прямые и между этими двумя параллелями через ту же точку могут проходить прямые, которые не встречают данной прямой, не будучи ей параллельны, хотя и лежат с нею в одной плоскости. На таком основании автор желает построить свою собственную науку, которую он называет «воображаемой геометрией». Основы этой науки изложены в настоящей брошюре; однако этот принцип и вытекающее из него предложение (стр. 21) «чем дальше продолжаем параллельные линии в сторону их параллелизма, тем более они приближаются одна к другой», достаточно характеризуют это небольшое сочинение и освобождают референта от необходимости дальнейшей его оценки?»

Рецензия подписана цифрой 140. Было бы весьма желательно выяснить, кто скрывается за этим своеобразным псевдонимом. Однако профессор Энгель сообщает, что все его попытки это сделать к цели не привели. Этот отзыв написан в гораздо более сдержанном стиле, нежели памфлет в «Сыне отечества», но в одном отношении ему явно уступает: «С. С.» по крайней мере откровенно сознается, что он ничего в работе Лобачевского не понял. «140» говорит с уверенностью человека, уяснившего себе работу, которую он критикует. Но, несмотря на более сдержанный тон, он несомненно несет бóльшую ответственность. Дело в том, что «Geometrische Untersuchungen» написаны гораздо доступнее, нежели все остальные работы Лобачевского; вдумчивый математик, который добросовестно попытался бы усвоить ее содержание, мог бы, правда не без некоторого напряжения, ее усвоить. Чтение первых же страниц не может не произвести впечатление, что автор отнюдь не малограмотный человек, а серьезный математик.

---

[1] Repertorium der gesammelten deutschen Literatur. Herausgegeben von E. Gersdorf. Leipzig, 1840, *3*, стр. 147.

История всех великих открытий, шедших в разрез с установившимися воззрениями, повествует о суровой, нелепой, часто невежественной критике. Открытие Лобачевского было наиболее революционным; оно подрывало наиболее установившиеся начала всякого знания, начала науки, считавшиеся наиболее точными, совершенно незыблемыми, освященными многовековым признанием. Оно не имело предшественников, которые были бы математическому миру известны, которые хотя бы в какой-либо мере подготовили научную мысль к восприятию этих новых идей. Не удивительно поэтому, что критика была особенно беспощадна. Не раз уже такая критика доводила исследователя до отчаяния; мы встретимся с этим и в дальнейшем, в истории неевклидовой геометрии. Тяжка была доля человека, на которого эта критика обрушивалась с такой жестокостью; горька была чаша, которую Лобачевскому пришлось испить. Но неизмеримо сильнее было его убеждение в правильности своих идей, в безукоризненной точности своих выводов, велика была его вера в грядущее признание его геометрии. Со всей, присущей ему энергией он продолжал ее развивать, совмещая это с огромной административной и общественной работой.

XVII. Мемуары «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»

Мемуар «О началах геометрии», как уже сказано, содержал все основные идеи Лобачевского. В расцвете лет, в период 1823 до 1832 гг., Н. И. Лобачевский создал свою новую геометрию и так ее разработал, что по существу ее содержания не много что оставалось к этому прибавить. Но напряженные размышления, с нею связанные, не покидали ее творца.

Его творение не было признано, было осмеяно. Лобачевский тяжело это пережил, но обескуражен этим не был. Обвинения, выдвинутые против созданной им геометрии, по существу были лишены основания; нужно было их опровергнуть. Остроградский находил, что работа Лобачевского была выполнена с малым старанием. Это было неверно; но, как уже выяснено, справедливо было то, что мемуар «О началах геометрии» был изложен слишком сжато, непонятно, не был достаточно развит. Во введе-

нии к другому мемуару, к которому мы теперь обращаемся, Лобачевский говорит об этом следующее.

«В тесных пределах повременного сочинения не мог изложить я моего предмета со всей подробностью. Много предложений, помещенных без доказательства, одни выводы из продолжительных и довольно запутанных вычислений заставляют меня подозревать, что мое сочинение, казавшись с первого взгляда темным, предупреждало охоту заняться им с некоторым вниманием и даже могло подать повод усумниться в строгости моего суждения и в верности выведенных заключений».

Но были размышления и другого рода, еще более серьезные, сомнения, которые возникали от существа предмета, которые в некоторой мере были не чужды и самому Лобачевскому.

В своем заключении, которым заканчивается работа «О началах геометрии», Лобачевский старается убедить читателя, что созданная им геометрия не содержит противоречий, что ни к какому противоречию не может привести никакое дальнейшее ее развитие. Доводами к такому заключению служили, с одной стороны, цельность и законченность основ новой геометрии, допускающей такое же неограниченное развитие, как и обыкновенная геометрия, а с другой стороны, постоянное совпадение результатов вычислений, которые различными способами выполняются средствами этой геометрии. И действительно, всякий, кто проштудирует мемуар «О началах геометрии», убеждением этим несомненно проникнется. Но сколь бы сильным это убеждение ни было, оно остается субъективным; действительного объективного, вполне убедительного доказательства, как теперь обыкновенно говорят, «непротиворечивости» воображаемой геометрии, строгого доказательства того, что противоречие в этой геометрии не может выплыть, как бы далеко мы ее ни развивали, — его в рассуждении Лобачевского, конечно не было, он сам хорошо это понимал. «Эта причина, — признается Лобачевский в том же предисловии к «Воображаемой геометрии», — понудила меня искать другого способа увериться самому в истине мной показанного и потом осмелиться еще раз представить мои исследования на суд ученых».

В 1834 г. по инициативе Лобачевского начинают выходить «Ученые записки Казанского университета». Первая книга открывается краткой вступительной статьей Лоба-

1-2

чевского, о которой нам придется говорить в следующей главе; за ней следует новый его мемуар «Воображаемая геометрия». Собственно этот мемуар был раньше составлен на французском языке и послан в журнал Крелля; но в этом журнале он появился только через два года;[1] причина задержки — заключалась ли она в очередности поступавших в редакцию статей, или были колебания относительно его печатания — остается невыясненной. Во всяком случае Лобачевский перевел эту работу на русский язык, внес при этом некоторые изменения и в таком виде в 1835 г. опубликовал ее в I томе «Ученых записок». В следующем 1836 г. в тех же «Ученых записках» появился мемуар, представлявший продолжение «Воображаемой геометрии» и носивший название «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Он был составлен на французском языке для журнала Крелля.[2] Обе работы составляют одно целое. По существу они представляют лишь развитие идей, содержащихся в мемуаре «О началах геометрии». Желая отпарировать возражения, основывающиеся на геометрической несообразности выводов, Лобачевский теперь становится на другой путь, как он сам говорит, до некоторой степени противоположный тому, которым он шел в первом мемуаре.

Рассуждение начинается следующими соображениями. Пусть a — произвольное положительное число, которое можно рассматривать как длину некоторого отрезка; пусть a' — функция от a, именно угол, который определяется уравнением

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,a' = e^{a}. \qquad (37)$$

Ясно, что это та же функция, которую Лобачевский обозначал через $F(a)$ или $\Pi(a)$ [см. формулу (14)]. Теперь Лобачевский становится на странную, на первый взгляд, позицию. Приводим опять его подлинные слова.

«В прямолинейном прямоугольном треугольнике пусть r — гипотенуза, p и q — катеты, P и Q — противополож-

---

[1] N. J. Lobatschefskij. Géométrie imaginaire. Journal für reine angewandte Mathematik. 1837, 17.

[2] «Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales».

ВООБРАЖАЕМАЯ

ГЕОМЕТРІЯ.

Пр. Лобачевскаго.

КАЗАНЬ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1835.

Титульный лист отдельного издания «Воображаемой геометрии».

ные им углы. В предположении $P + Q < 2d$, допускаем

$$\begin{aligned} \sin r' &= \sin p' \sin q', \\ \sin r' &= \operatorname{tg} P \operatorname{tg} Q, \\ \operatorname{tg} r' &= \operatorname{tg} p' \sin P \end{aligned} \tag{38}$$

и посмотрим, к каким заключениям поведут далее такие уравнения».

Лобачевский прежде всего доказывает, что из этих уравнений вытекает ряд других соотношений, именно те, которые в главе III приведены под номерами (2a) — (2e). Из этих уравнений прямоугольного треугольника Лобачевский выводит соотношения, которые в силу сделанного предположения должны связывать стороны a, b, c и углы A, B, C любого треугольника. С большим искусством он выводит вслед за тем соотношение, которое — подчеркнем еще раз, в сделанных предположениях — определяет сумму углов $S = A + B + C$ треугольника,

$$\cos \frac{1}{2} S = \frac{(e^s - 1)(e^{s-2a} - 1)(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}{(e^a + 1)(e^b + 1)(e^c + 1)}, \tag{39}$$

где $s = a + b + c$ — периметр треугольника. Он устанавливает, далее, что правая часть есть положительное число, меньшее единицы, а следовательно сумма углов меньше двух прямых.

Теперь Лобачевский спрашивает, удовлетворяют ли уравнения, связывающие стороны и углы треугольника, выведенные в сделанных предположениях, тем условиям, при которых составление всякого треугольника возможно. «Таких условий, независимо от значения суммы трех углов, — говорит он дальше, — находится только два: *составление треугольника всякий раз возможно, когда даны или три стороны, из которых сумма двух более третьей, или две стороны и угол между ними произвольные*».

Требование, чтобы сумма двух сторон всегда была больше третьей, теперь обыкновенно называется *постулатом треугольника*. Лобачевский дает утвердительный ответ на поставленный вопрос, основанный на следующих соображениях. Он показывает, что каковы бы ни были заданные две стороны и угол между ними, или три стороны, удовлетворяющие т. н. постулату треугольника, уравнения дают действительные значения остальных элементов

треугольника; поэтому треугольник, имеющий заданные элементы, возможен.

Лобачевский показывает затем, так же как это было сделано в первом мемуаре, что уравнения треугольника сводятся к обычным уравнениям евклидовой геометрии, когда стороны треугольника весьма малы. Отсюда Лобачевский делает следующие выводы.

«1. *В теории ничто не мешает сумму углов прямолинейного треугольника принимать менее двух прямых.*

2. *С таким предположением уравнения (13)* [1] *заменяют уравнения (15)* [2] *и не могут вести к ложным заключениям.*

3. *Воображаемая геометрия обнимает употребительную геометрию, как частный случай, к которому переходим, принимая линии бесконечно малыми: так что в этом отношении употребительная геометрия может быть названа Геометрия дифференциальная.*

4. *Значения для элементов линии, поверхности и объема тел в обеих геометриях одинаковы.*

5. *Предположение, что сумма углов треугольника менее двух прямых, может быть допущено только в применении к аналитике, потому что измерения в природе не открывают нам в этой сумме ни малейшего отклонения от половины окружности».*

Можно ли считать эти соображения вполне убедительными? Конечно, нет. Не видно, что дает право на утверждение, содержащееся в основном положении 1. Верно то, что эти рассуждения пополняют те выводы, которые содержатся в мемуаре «О началах геометрии». Лобачевский чувствует себя на твердой почве с того момента, когда установлены основные тригонометрические уравнения (11а) — (11е). В мемуаре «О началах геометрии» установлено, что к этим уравнениям приводит постулат о параллельных в том виде, как он принят Лобачевским; в «Воображаемой геометрии» установлено обратное: из этих уравнений вытекает, что сумма углов треугольника меньше $2d$, а следовательно вытекает и вся воображаемая геометрия. В этой постановке с особенной остротой стоит вопрос, что дает основание устанавливать a priori тригонометрические уравнения (2). Этот вопрос тут же ставит и сам Лоба-

---

[1] Тригонометрические уравнения воображаемой геометрии.
[2] Тригонометрические уравнения евклидовой геометрии.

чевский. «Может быть кому-нибудь покажется с первого взгляда предположение уравнений (1), (2), (3)[1] столь произвольным, что его легко заменить другим; однакож этого сделать нельзя, как доказал я в моем сочинении «О началах геометрии». Лобачевский, таким образом, и сам стоит на том, что оба мемуара друг друга дополняют, но один другого не заменяет. И к сожалению, ни один не устанавливает твердо того основного факта, который так занимал Лобачевского, который действительно играет главную роль — не решает вопроса о непротиворечивости воображаемой геометрии. Нужно сказать, что Лобачевский был очень близок к решению этого вопроса. По существу, это решение у него собственно уже есть; его нужно было иначе, точнее формулировать. Но это Лобачевским не сделано; дать исчерпывающее решение вопроса составило уже удел его последователей.

По вопросу о том, какая же геометрия действительно имеет место в реальном пространстве, Лобачевский, как видно из положения 5, теперь склоняется в пользу геометрии Евклида; он мотивирует это результатами тех опытных данных, которые приведены в мемуаре «О началах геометрии». Он прибавляет к этому, что надобно «вместе с тем быть убеждену и в том, что независимо от опыта напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается в нашем понятии о телах».

Этим заканчивается первая часть мемуара — попытка с самого начала дать более убедительное доказательство того, что «воображаемая геометрия» не содержит в себе противоречий. Однако очень любопытные соображения, которые Лобачевский для этого приводит, все же нельзя считать вполне убедительными; Лобачевский и сам это понимал, как это видно из его высказываний, его исканий в других работах.

Вторую часть мемуара составляет вывод элементов длины, площади и объема; этот вывод мало чем отличается от того, который был дан в первом мемуаре.

Частью попутно, частью вслед за этим следуют вычисления, имеющие своей основной задачей применение воображаемой геометрии к вычислению определенных интегралов. Основной замысел тот же: одна и та же геометрическая величина находится различными способами: либо

[1] Т. е. трех основных уравнений (2) прямоугольного треугольника.

путем расчленения на части, различными способами проводимого, либо интегральными вычислениями в различных координатах. В том и в другом случае сопоставление результатов приводит либо к установлению значения того или иного определенного интеграла, либо к преобразованию определенного интеграла в другой более простой. Мемуар «Воображаемая геометрия» заканчивается таблицей, содержащей 50 формул, которые выражают такого рода результаты; той же таблицей заканчивается и второй мемуар. «Искусство, с которым Лобачевский выполняет этого рода преобразования, — замечает Либман, — вызывает удивление... это искусство носит печать гениальности». Вместе с тем, по словам того же Либмана, и эти мемуары больше, чем какая-либо другая из его работ оправдывают замечание Гаусса, что работа Лобачевского напоминает непроходимый девственный лес. Как было указано выше (стр. 182), Либман выпустил немецкий перевод этих двух мемуаров с пояснительными комментариями. Он говорит в предисловии: «Не без большого труда, иногда только при помощи сильного специального приема, переводчику удалось произвести целесообразное разбиение материалов на части и выполнить вычисления. И здесь необходимо с определенностью сказать, что ему не везде удалось проникнуть в цель, которую автор себе ставил». Значительное большинство вычислений посвящено разысканию объемов пирамид и прежде всего тетраэдров (трехгранных пирамид). И здесь автор развивает те же методы, которыми он пользовался в мемуаре «О началах геометрии». Собственно этих методов два. Один заключается в том, что пирамида разбивается на конические вырезки, дается выражение бесконечно малого вырезка, которое интегрируется по различным частям основания. Второй прием заключается в том, что вычисляется объем конуса и пирамиды с бесконечно удаленной вершиной; это значит, что по отношению к конусу рассматривается случай, когда все образующие параллельны между собой (рис. 30); объем оказывается конечным, и вычисление его приводится к сравнительно простому интегралу. То же относится к пирамиде с параллельными боковыми ребрами (рис. 31). Когда найдены выражения для объема любой такой пирамиды, объем тетраэдра вычисляется как разность объемов таких предельных пирамид. Такое разбиение может быть выполнено различными способами; это сопоставление

вновь приводит к любопытным аналитическим результатам. Приводить здесь отдельные примеры таких результатов вряд ли целесообразно. Читателю, который этим интересуется, следует обратиться к подлинным работам Лобачевского, которые в настоящее время выпущены с обстоятельными комментариями. Здесь мы ограничимся только немногими указаниями.

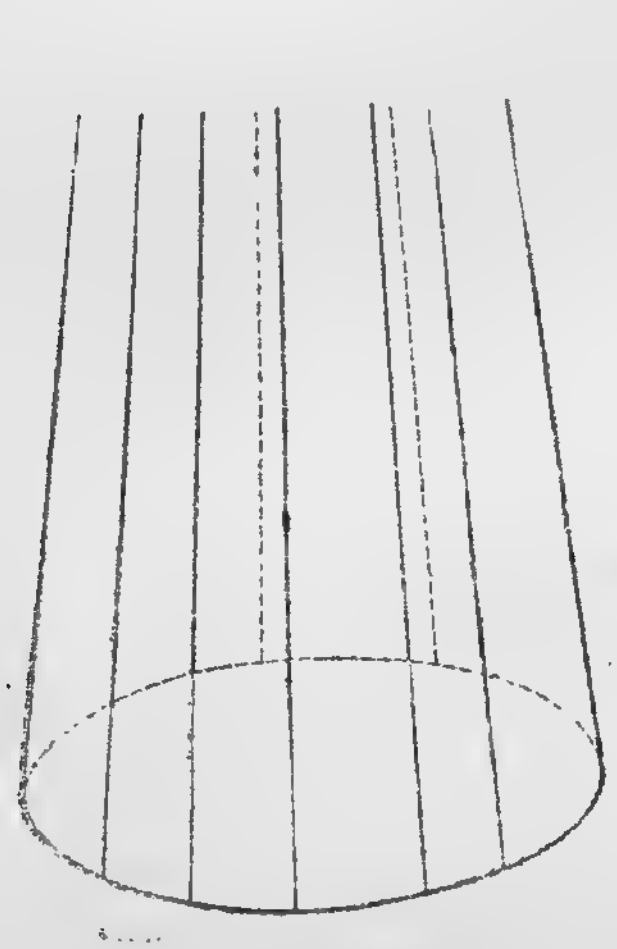


Рис. 30.

Рис. 31.

Лобачевский имел в своем распоряжении сборник задач на вычисление определенных интегралов, составленный Лежандром.[1] Лобачевский получает значение ряда этих интегралов, два из которых он находит особенно удачно. Он находит ряд интегралов, по отношению к которым некоторые интегралы Лежандра составляют только частные случаи. Он получает значение определенного интеграла, которым занимался Лагранж и нашел его значение только

---

[1] A. M. L e g e n d r e. Exercises de calcul intégral, I partie. Paris, 1811. К нему добавление в 50 страниц «Supplément à la première partie», выпущено без указания даты. В нем дана таблица Table générale des formules. Этот первый сборник определенных интегралов до некоторой степени служит для Лобачевского образцом.

для частного случая. Вычисление объема пирамиды часто приводит к функции

$$L(x) = -\int_0^x \lg \cos x \, dx. \qquad (40)$$

Преобразования же интегралов, которыми эти объемы выражаются, приводят к линейным соотношениям между значениями функции (40) для различных значений аргумента.

Нужно иметь в виду, что это было время, когда традиции Эйлера были очень сильны и формальные выводы очень ценились. Лобачевский с удовлетворением констатирует, что ему удалось привести некоторые интегралы к эллиптическим интегралам того или иного рода или к функциям, которые просто развертываются в тригонометрические ряды. Эти результаты сохранили значение и по настоящее время. В современных справочниках по определенным интегралам имя Лобачевского встречается очень часто.

Все эти результаты очень любопытны сами по себе; они несомненно утверждают субъективную уверенность в полной правильности воображаемой геометрии. Но объективного доказательства ее непротиворечивости они, конечно, не дают; самый метод к этому привести не может. Это сознание не покидало Лобачевского до конца жизни.

XVIII. Второй период управления университетом

В годы своего управления университетом Лобачевский создал все свои научные труды. Если даже отрешиться от их значения, если только учесть, сколько времени и труда нужно было употребить на их составление, на выполнение тех вычислений, которые содержались в перечисленных уже работах, на подготовку их к печати, то этой научной деятельности не только в те времена, но и в наше время было бы достаточно для всякого ученого. Все эти годы, однако, Лобачевский интенсивно вел преподавание обыкновенно по двум, иногда даже по четырем кафедрам. Он преподавал в разное время интегральное и вариационное исчисления, статику и динамику, гидростатику и гидравлику, опытную и теоретическую физику; заменяя отсутствующих преподавателей, он нередко совмещал довольно отдаленные дисциплины. Одной этой препо-

давательской работы было бы вполне достаточно для профессора. И с этой большой плодотворной научной и преподавательской деятельностью Лобачевский совмещал не менее огромную административную работу. Читая его переписку, описание историков, воспоминания товарищей и учеников, удивляешься выдержке и энергии этого ученого и труженика-администратора.

Пополняя сведения, данные в библиографическом введении, отметим, что «История Казанского университета» Загоскина заканчивается 1827 г., т. е. до вступления Лобачевского в управление университетом. Главными источниками для изучения дальнейшей его деятельности в первый и во второй периоды его управления университетом служат обширные архивные материалы, составленный профессором Фойхтом «Отчет Казанского университета за 17 лет», ряд статей, принадлежащих профессору Загоскину, под общим названием «Казанская старина»,[1] и, наконец, некоторые статьи в справочной книге Казани.[2]

К тому времени, как Лобачевский заканчивал третью трехлетку на посту ректора, условия, в которых фунционировал университет, значительно изменились. В 1835 г. был опубликован новый устав русских университетов. Этот устав николаевского времени значительно отличался от устава 1804 г., созданного в эпоху либеральных тенденций Александра. По новому уставу автономия университета была значительно снижена, попечитель в качестве руководителя и начальника университета получал гораздо более широкие полномочия: он должен был употреблять все средства к приведению университета в «цветущее» состояние, обращать внимание на способности, прилежание и благонравие профессоров, адъюнктов и чиновников университета, исправлять нерадивых указаниями, замечаниями и принимать меры к удалению неблагонадежных, мог председательствовать в совете и в правлении. Университет был отстранен от участия в управлении другими учебными заведениями округа.

Министром народного просвещения, проводившим эту реформу, был уже известный нам граф Уваров (стр. 65); он был достаточно рассудителен, чтобы не поддерживать

---

[1] «Волжский вестник», 1891—1892.

[2] «Спутник по Казани» под редакцией проф. Н. П. Загоскина, Казань, 1895.

безрассудных тенденций Магницкого, но в то же время и достаточно консервативен, чтобы проводить режим Николая I. «Вообще все движение управления внутреннего, — писал он, — приспособлено к видам правительства о точнейшем и неразрывном наблюдении за духом и ходом высших учебных заведений». Ректор университета также получал гораздо более широкие обязанности и полномочия. Он получал право делать профессорам выговоры и замечания, если обнаружит упущения или неисправности с их стороны. Инспектор, который прежде избирался советом из числа профессоров, теперь назначался попечителем и, главное, был подчинен не ректору, а непосредственно попечителю. Главная же задача реформы заключалась в том, чтобы усилить роль дворянства в управлении страной. Николаевский университетский устав особенно определенно подчеркнул дворянско-классовый характер правительственной политики в области просвещения. Сам Уваров так выражал две главные цели реформы 1835 г. «Во-первых, возвысить университетское учение до рациональной формы, и, поставив его на степень, доступную лишь труду, долговременному и постоянному, воздвигнуть благоразумную преграду преждевременному поступлению на службу молодежи еще незрелой; во-вторых, привлечь в университет детей высшего класса в империи и положить конец превратному воспитанию их иностранцами». Нужно сказать, что это первое изменение университетского устава еще не было очень решительным. Первая цель, которую указывает Уваров, проводилась серьезно: были повышены требования к студентам, было увеличено число профессорских кафедр, повышены требования к лицам, их занимавшим, введены ученые степени магистра и доктора и установлены требования, на основе которых они предоставлялись. Но новый устав все же ставил жизнь университета в существенно новые, гораздо более тяжелые условия.

Казанский университет начал жить по новому уставу с 1 августа 1837 г. Незадолго перед этим закончился срок, на который Лобачевский в третий раз был избран ректором. Новому ректору предстояла задача проведения в жизнь устава 1835 г., задача трудная для него, не легкая и для профессорской корпорации. Прежде она избирала своего представителя, теперь она должна была выбрать начальника с широкими полномочиями. Профессорская кол-

легия теснее сплотилась. Прежние выборы Лобачевского проходили отнюдь не совсем гладко. Так, в 1833 г. он прошел только 9 голосами против 7. Теперь он был выбран на четырехлетие большинством 17 голосов против 2. После утверждения он мог считать себя уполномоченным как правительством, так и профессорским коллективом. Задача была сложная; если прежде Мусин-Пушкин держался главным образом, опираясь на Лобачевского, то теперь Лобачевский имел возможность вести свою линию благодаря сложившимся отношениям с Мусиным-Пушкиным.

Вскоре после утверждения Лобачевский отправился в Москву и в Петербург для осмотра учебных заведений. Подлинная цель поездки несомненно заключалась в том, чтобы ориентироваться в настроениях академических кругов. По прибытии в Петербург Лобачевский представился министру С. С. Уварову. Об этом посещении Лобачевский сообщает Мусину-Пушкину в письме от 29 октября 1836 г. К сожалению, в коллекции писем Лобачевского, находившихся в распоряжении комиссии по изданию полного собрания сочинений, этого письма не оказалось. А. В. Васильев приводит любопытное извлечение из этого письма. Министр отдавал справедливость заслугам Мусина-Пушкина, «который поставил университет на такую степень совершенства, несмотря на ничтожество, в которое он был приведен мистицизмом прежнего попечителя». Лобачевский осмотрел очень большое число высших и несколько средних учебных заведений Петербурга. В результате этого осмотра он составил записку, заключавшую соображения, к которым этот осмотр его привел. Эта записка сохранилась и включена в коллекцию писем Лобачевского. Она написана на двух листах писчей бумаги обычным его бисерным почерком.[1] Записка содержит соображения, которые, однако, вряд ли можно рассматривать как научно-педагогические взгляды Лобачевского. Она состоит из двух частей. Первая — «часть хозяйственная» — содержит материалы об устройстве и оборудовании помещений высших и средних учебных заведений и об устройстве жизни учащихся. Вторая — «ученая часть» — содержит соображения

[1] А. В. Васильев ошибается, относя эту записку к 1834 г. На подлинном манускрипте имеется собственноручная надпись Лобачевского; «Записка, составленная ректором Казанского университета Лобачевским. 1836 г., ноябрь».

об организации учебного дела. Основная мысль заключается в том, что возможна двоякая постановка учебного дела в высшем учебном заведении. Одна (германская), «преподавательная», заключается в организации большого числа читаемых курсов, причем студентам предоставляется свободный выбор предметов, которые они хотят слушать; другая, педагогическая (преимущественно французская), заключается в установлении детальных программ, которые студенту, выбравшему то или другое отделение, надлежит усвоить. Средняя школа должна дать общее образование, необходимое для каждого просвещенного человека; высшая школа должна дать образование, соответствующее индивидуальным склонностям и способностям каждого учащегося. Задача университета — создать возможность получать такое специальное образование по различным отраслям знания. «Высшая степень образованности приобретается самым способным юношеством только в университете или в равных с ним заведениях. Но в университетах многоразличность предметов учения требует разграничения, какое показано в уставе. Остается сделать его подробнее, с назначением ближе самих пределов». Отметив разницу во взглядах на этот предмет в Московском и Петербургском университетах, Лобачевский продолжает: «Казанский университет в этом случае может быть предложит свое, Харьковский — опять новое мнение, покуда решительное предпочтение будет отдано тому выбору, который по опыту должен быть признан, как самый удачный. Опровергать или защищать еще, следовательно, не время; но по крайней мере дозволяется говорить о первых указаниях». Таким общим указаниям посвящена заключительная часть записки. Конечно, все это может опять производить впечатление тривиальных взглядов; но это отнюдь не так. В правительстве и в прессе в то время происходили острые споры по поводу того, надлежит ли во всех университетах провести единые программы, или каждому университету нужно предоставить собственную, индивидуальную установку. Лобачевский стоит на последней точке зрения, и за нее немало борется. Записка содержит также указания ряда обстоятельств, которые надлежит принимать во внимание при организации программы, в том числе и сословные тенденции родителей. Это, очевидно, дань времени; другие высказывания и педагогические приемы Лобачевского этого взгляда не подтверждают.

А время настойчиво требовало выполнения указаний, диктуемых сверху.

Лобачевский вернулся в Казань вести университет по новому пути. И самая большая заслуга его заключается в том, что путь, по которому он повел жизнь Казанского университета, не уклонился значительно от того, по которому он шел раньше, что не новая записка, а скорее «Речь о важнейших вопросах воспитания» определяла его дальнейшую деятельность. Это несколько облегчалось тем, что Казань не была преимущественно дворянским городом; как и раньше (см. стр. 12), очень крупного дворянства в Казани не было, а в местной интеллигенции, которая центрировалась вокруг Фукса, Лобачевский пока что получал поддержку; другие интеллектуальные центры он призвал к жизни сам.

Давно уже в университетских кругах Казани, даже еще при Магницком, царило убеждение, что развернуть широкую, настоящую деятельность высшего учебного заведения Казанский университет не будет иметь возможности, пока он не получит достаточных помещений, пока не будут хорошо оборудованы его учебно-вспомогательные учреждения, пока к научной и преподавательской работе в нем не будут привлечены высококвалифицированные ученые. Таковы были три основные задачи, которые стояли перед Лобачевским в его деятельности на посту ректора университета.

Уже в 1832 г. Мусину-Пушкину удалось исходатайствовать значительные ассигнования на университетское строительство. Оно вскоре после этого и началось, но широкое развитие получило в конце 30-х годов. Если управление университетом Лобачевский вел, опираясь на попечителя Мусина-Пушкина, то строительство он вел при содействии выдающегося архитектора М. П. Коринфского, своего бывшего ученика, позже связанного с ним тесной дружбой.

Внешний облик Казани за тридцать лет значительно изменился. Многие улицы были замощены, из них двенадцать даже торцами. Известный русский геолог Гельмерсен, посетивший Казань в 30-х годах, заявил, что этот город «принадлежит бесспорно к наилучше построенным городам России: прекрасные здания в новом вкусе, древние церкви, крепость и мечети со стройными минаретами украшают и разнообразят ее». Чех Михаил Котлер, бывший в Казани в 1841 г., отмечает, что Казань видный, чистый и краси-

Казанский университет

Гравюра 30-х годов XIX века, работы В. Турина

вый город, каким он его вовсе и не воображал: улицы ровные и широкие, дома каменные, церкви высокие и т. д. В университетском строительстве нужно было от новой архитектуры не отставать; нужно было даже итти впереди ее. Лучшие здания не только в Казани, но и во всем Поволжье были сооружены Коринфским. Ему Лобачевский и поручил вести университетское строительство. Примерно в пять лет были построены здания астрономической обсерватории, клиники, анатомического театра, библиотеки, физического кабинета и химической лаборатории, типографии. «Можно смело сказать, — говорит Загоскин в своем «Спутнике по Казани» (стр. 287), — что в стенах этих учреждений все дышит памятью Н. И. Лобачевского, все восстанавливает перед нами симпатичный облик великого ученого и неутомимого труженика — ректора». Казалось бы, что, поручая строительство такому выдающемуся архитектору, как Коринфский, Лобачевский мог бы на него вполне положиться. Но не таков был Лобачевский. Мы уже указывали, что Лобачевский стал изучать архитектуру, чтобы руководить этим строительством с достаточной авторитетностью. К 1842 г. университетские здания были построены. Лобачевскому, возглавлявшему строительную комиссию, удалось даже сэкономить на этом из ассигнованной суммы до 50 тысяч рублей. К сожалению, ею вскоре пришлось воспользоваться для восстановления ущерба, нанесенного пожаром.

Некоторые из вновь построенных прекрасных зданий университета погибли во время случившегося в Казани ужасного пожара. Состоящая преимущественно из деревянных построек, открытая действию ветров, без достаточных водных запасов в самом городе, Казань часто становилась жертвою огня. Загоскин посвящает особую главу казанским пожарам, неоднократно уничтожавшим значительную часть города. Так, в 1815 г. выгорело 70 кварталов, 1500 домов и 19 церквей; на лучшей улице города — Воскресенской — остались нетронутыми огнем всего только 10 домов, к счастью, в их числе — университет. При этом бедствии, как рассказывает Загоскин, казанская историческая наука понесла невознаградимую утрату: сгорел архив местного губернского правления, заключавший в себе старинные памятники, драгоценные для истории города и края. Но самый большой пожар, девятый по счету, случился 24 августа (5 сентября) 1842 г. По рассказу Загос-

кина, огонь вспыхнул около 10 часов утра на Проломной улице, в доме купца Щербакова. По причине чрезвычайно сильного ветра пожар быстро охватил соседние здания и стал с неимоверною силой распространяться по направлению на северо-восток. Буря, достигшая степени урагана, относила горящие головни на громадные расстояния, даже за пределы города. Только к двум часам утра следующего дня ветер утих и дал возможность локализовать дальнейшее распространение огня. В этот страшный пожар, истребивший лучшие, наиболее торговые части города, жертвою огня сделались 1309 домов и 9 церквей.

Здание университета и на этот раз удалось отстоять. Защитой университетских зданий от огня лично руководили Мусин-Пушкин и Лобачевский. Особую опасность представляло возможное распространение огня на библиотеку. Наиболее ценные книги и рукописи были вынесены студентами в Арское Поле; но, конечно, этим путем удалось сохранить лишь незначительную часть библиотеки. Самое же здание библиотеки уже начинало гореть. Однако Лобачевский со свойственной ему энергией мобилизовал студентов; с их помощью удалось огонь погасить, и библиотека была спасена. Но астрономическая обсерватория и магнитная станция сгорели. С большим трудом удалось спасти важнейшие инструменты обсерватории. За самоотверженную защиту университетских зданий Лобачевский вновь получил благодарность царя. Средства, которые были прежде сэкономлены, теперь пришлось употребить на восстановление зданий.

Одновременно с постройкой новых зданий шло оборудование учебно-вспомогательных учреждений. Описывать это оборудование здесь неуместно; читатель, которого это интересует, найдет подробности в «Отчете» Фойгта. Здесь ограничимся только указанием, что без активного участия Лобачевского в этом деле не обходился ни один шаг; наибольшего внимания и труда с его стороны потребовало оборудование физического кабинета и астрономической обсерватории.

Особые трудности представляло пополнение преподавательского персонала. Ко времени вступления Лобачевского в управление университетом общее число преподавателей, включая даже лаборантов, было 43. Уже в 1843 г. число их составило 96. В 1837 г. многие преподаватели, по смыслу нового устава, вследствие повышенного требова-

ния к образовательному цензу должны были оставить университет, они были заменены более квалифицированными лицами. Таким образом, преподавательский персонал комплектовался как раз при Лобачевском. Однако на Физико-математическом факультете изменения были незначительны; это объяснялось осторожностью, с которой Лобачевский комплектовал факультет, еще когда состоял его деканом.

Впрочем усиление научных преподавательских кадров было далеко не только казанской, но и общерусской задачей. Число кафедр всюду было увеличено в зависимости от потребности науки, но замещать их часто было некем. Министерство приняло целесообразную для того времени меру: в Петербурге был организован своеобразный институт для подготовления профессуры. В этот институт высшие учебные заведения могли направлять молодых людей, которые после некоторой специальной подготовки направлялись за границу, главным образом, в Германию и во Францию, для усовершенствования и подготовки к научной работе. Казанский университет тоже направил в этот институт шестерых своих воспитанников. Их подвергли на месте испытанию, через которое проходили все, прибывавшие в институт; но из шестерых пригодными были признаны только двое. Мало того, учитывая недостаточную подготовку присланных молодых людей, министерство возложило расходы по их командировке на университет, точнее, на тех членов совета, которые участвовали в том заседании, в котором были выбраны командированные лица. Эта нелепая мера привела к тому, что совет не решался более посылать своих питомцев в институт. Университету оставалось для замещения кафедр пользоваться либо собственными воспитанниками, получившими ученые степени, либо опять приглашать профессоров из-за границы. Это создало неблагоприятные условия для комплектования университета. Были между приглашенными мало подходящие люди; но были и ученые, приобретшие потом почетную известность. Из русских ученых отметим А. М. Бутлерова, П. И. Котельникова, В. Я. Баженова, А. К. Казем-Бека. Каждый крупный ученый поднимает тонус всего учебного заведения. К концу управления Лобачевского Казанский университет принял облик европейского высшего учебного заведения. И этот облик он сохранил; по сей день это связывают с именем Лобачевского.

Ко времени управления Лобачевским Казанским универ-

ситетом относится важное событие — организация отделения восточных языков. Не приходится говорить о том, в какой мере это было целесообразно в восточном университете. Получить более или менее точные сведения об участии Лобачевского в этом деле нам не удалось.

Лобачевскому Казанский университет обязан созданием своего научного органа — «Ученые записки Казанского университета», который существует по настоящее время. Вопрос о создании такого органа Лобачевский возбудил еще гораздо раньше; но только в 1835 г. ему удалось это начинание осуществить. Вступительная статья к первому выпуску «Ученых записок» написана Лобачевским. Многие считают ее содержание тривиальным. На эту особенность некоторых выступлений Лобачевского нам уже приходилось указывать несколько раз. Однако тривиальность тех или иных идей зачастую объясняется тем, что идеи эти совершенно усвоены, до некоторой степени вошли в наше сознание, в плоть и в кровь. Но тем выше заслуга тех, кто эти идеи защищал тогда, когда они еще не были общепризнанными, когда за них приходилось вести продолжительную и настойчивую борьбу. Идеи же Лобачевского всегда были прогрессивны. Шесть лет Лобачевский отстаивал необходимость создания специального ученого органа. И вряд ли он добился бы на это разрешения, если бы за ним не стоял грубый и резкий, но все же благожелательный и доверявший ему Мусин-Пушкин.

За вступительной статьей в первом выпуске «Ученых записок» следует мемуар Лобачевского «Воображаемая геометрия». С тех пор прошло свыше ста лет, журнал завоевал себе почетное место в научной литературе; но вряд ли на его страницах появилась другая статья столь же высокого научного значения. Скажем больше. Немного есть научных журналов, которые открывались бы статьей, сыгравшей в истории науки такую важную роль.

Так протекала многообразная и энергичная деятельность Лобачевского на посту ректора Казанского университета. Мы остановились на тех делах Лобачевского, которые оставили глубокий след в науке или в истории Казанского университета. Остановимся еще на двух проявлениях его деятельности: на его борьбе за учреждение при университете ученого общества и за постановку преподавания сельскохозяйственных наук.

Возникновение этого «частного ученого общества» до-

вольно любопытно. Мысль о создании такого общества возникла в издательском комитете, который был единственным официальным органом, объединявшим в то время казанскую интеллигенцию, главным образом университетскую. Уже в 1838 г. Лобачевский поставил в этом комитете вопрос о создании «Общества любителей наук»; он получил поручение составить проект устава такого общества. По загруженности Лобачевского это дело затянулось, но всплыло вновь в 1842 г. в следующей обстановке. Как уже было рассказано, в доме К. Ф. Фукса очень часто собиралась казанская интеллигенция; читались рефераты, литературные произведения, даже собственные произведения хозяев — жена Фукса была поэтессой, правда не очень выдающейся. Об этих собраниях сделалось известно в Петербурге; попечитель даже сообщал о них министру. Издательский комитет пришел к мысли сделать такого рода собрания официальными, создать при университете ученое общество. Лобачевский теперь составил проект устава этого общества, Мусин-Пушкин подкрепил ходатайство об его утверждении тем доводом, что такого рода собрания будут тогда «на виду», т. е. будут поддаваться контролю. Однако министерство дало уклончивый ответ, указывая на то, что цель общества недостаточно очерчена и пока она не выяснится, обществу следует оставаться частным. Общество функционировало, таким образом, полулегально, в течение ряда лет в нем читались разнообразные доклады; из него выделилось впоследствии известное Казанское физико-математическое общество.

В Казани существовало другое ученое общество с более определенной целью — Казанское экономическое общество. Человек чрезвычайно разнообразных интересов, Лобачевский принимал в этом обществе очень активное участие. Именно в недрах этого общества возникла мысль о преподавании в университете сельскохозяйственных наук. Эта мысль встретила всеобщее сочувствие. Но вопрос о том, где, на каком факультете или отделении поставить это преподавание, был предметом продолжительных и настойчивых споров. Дискуссия развернулась главным образом между экономистом Горловым и математиком Лобачевским. Горлов настаивал на том, чтобы сельскохозяйственные науки, в силу экономического своего значения, преподавались на юридическом факультете; эта точка зрения

была принята и советом университета. Лобачевский выступил с очень подробным особым мнением. Это особое мнение представляет большой интерес и, может быть, характеризует педагогические взгляды Лобачевского больше, чем речь «О важнейших вопросах воспитания». Мы остановимся на самом важном моменте, на том воззрении Лобачевского, которое позже победило и определило характер сельскохозяйственного образования в стране. Лобачевский настаивал на том, чтобы преподавание сельскохозяйственных наук было поставлено на Физико-математическом факультете. Нужно помнить, что на этом факультете в то время преподавались и все биологические науки. Лобачевский настаивал на том, что центр тяжести сельскохозяйственного образования должен падать на зоологию, ботанику, физику, физическую географию, а изучение этих наук требует даже серьезных математических сведений. Как известно, в этом именно аспекте строится преподавание сельского хозяйства и в настоящее время. Прозорливость мысли была исключительной чертой Лобачевского.

«Ни одно событие университета, — пишет Н. Н. Булич, — ни один сколько-нибудь важный факт его истории с самого начала до настоящего времени не могут быть упомянуты без имени Лобачевского. Его благородная жизнь тесно и неразлучно сплеталась с историей Казанского университета; она есть живая летопись университета, его надежд и стремлений, его возрастания и развивания».

XIX. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»

Мы уже говорили о том, что наиболее плодотворную научную деятельность Лобачевский развернул именно в те годы, когда он стоял во главе университета. «Совершенно изумительно, — замечает Энгель,[1] какую огромную научную продукцию он дал именно в эти годы, когда он был так перегружен преподавательской и административной работой». Главным произведением, опубликованным Лобачевским во второй период управления университетом, было самое обширное из его сочинений «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Оно начало печа-

[1] F. Engel. N. I. Lobatschefskij, стр. 392.

таться в «Ученых записках университета» в том же 1835 году в III книжке, т. е. непосредственно после того, как была опубликована «Воображаемая геометрия». Печатание продолжалось в 1836 и 1837 гг. и было закончено только в III книжке за 1838 г. Мы до сих пор говорили только о тех идеях Лобачевского, которые привели к неевклидовой геометрии и составляют ее содержание. Но, по существу, замысел Лобачевского был гораздо шире: это тот же замысел, который так часто ставили себе комментаторы Евклида: дать безукоризненное построение начал геометрии. Первые шаги в деле осуществления этого замысла мы уже находим в «Геометрии». Конечно, и самое создание неевклидовой геометрии находится с этим в тесной связи. Дать все построение геометрии ab ovo с учетом двух возможных гипотез в теории параллельных линий, т. е. евклидовой и «воображаемой» геометрии, показать как их разветвление, так и их объединение в одну более общую систему, — такова задача этого сочинения. Обстоятельно изложить построение начал неевклидовой геометрии действительно было уже необходимо. В мемуаре «О началах геометрии», как мы видели, самые основы неевклидовой геометрии изложены конспективно, в такой сжатой форме, что уяснить себе их по этому очерку было невозможно. В мемуаре «Воображаемая геометрия» Лобачевский исходит из готовых уже уравнений, связывающих стороны и углы треугольника; они кажутся неожиданно упавшими с неба; Лобачевский и сам говорит, что такое априорное задание аналитической базы может вызвать у читателя изумление; чтобы устранить возникающее недоумение Лобачевский вновь отсылает к сочинению «О началах геометрии»; получается заколдованный круг. Чтобы из него выйти, Лобачевский считает необходимым изложить всю геометрию сначала, и притом чисто синтетически.

«Главная выгода в аналитике та, — пишет Лобачевский во «Вступлении», — что здесь от уравнений идут всегда прямой дорогой к предположенной цели. Синтез не подчиняется каким-нибудь общим правилам, но с него надо начинать по необходимости, чтобы, наконец, отыскав уравнения, достигнуть с тем вместе той черты, за которой все переходит уже в науку чисел. Напрасно хотели бы такой случай, как и всю теорию параллельных, рассматривать аналитически». Это не совсем так; но в эпоху Лобачевского идея о полной арифметизации геометрии была еще

математикам совершенно чужда: она выплыла только в связи с развитием идей самого Лобачевского. Так или иначе, Лобачевский становится на путь чисто синтетического построения геометрии с самого начала, т. е. на путь, по которому шли Евклид и его последователи.

«Вступление» содержит критику обоснования геометрии, как оно выполнялось раньше. Лобачевский начинает с разбора наиболее важных попыток доказать постулат о параллельных линиях, останавливаясь главным образом на доказательстве Л. Бертрана и на рассуждениях Лежандра; он разбирает их с тщательностью, какая до него никогда не проявлялась. Разбор каждого доказательства здесь состоит из двух частей: 1) Лобачевский обнаруживает, в чем коренится ошибка доказательства, 2) он показывает, как обстоит дело в неевклидовой геометрии, как в ней теряют доказательную силу те рассуждения, которыми пользуются авторы доказательства. В том и другом отношении особенный интерес представляет собой его анализ доказательства Бертрана; нужно сказать, что и по настоящее время вряд ли есть сочинение, в котором этот анализ выполнен с такой убедительностью. Во всяком случае рассуждения Буняковского[1] им сильно уступают. Лобачевский показывает, что основная ошибка Бертрана заключалась в том, что он рассматривает угол как величину, не устанавливая правильных критериев сравнения различных значений величины (различных углов).

От этого важного вопроса Лобачевский переходит к разбору тех оснований, на которых вообще строилась геометрия. Точкой его отправления в этой критике служит следующее основное соображение: «...пространство, протяжение, место, тело, поверхность, линия, точка, направление, угол — слова, которые начинают геометрию, но с которыми никогда не соединяют ясного понятия». Никогда до Лобачевского с такой определенностью не высказывалось требование пролить свет на всю совокупность этих понятий. Приведем еще следующий абзац, в котором это требование выясняется.

«Геометрию начинают обыкновенно, придавая телам три протяжения, поверхностям два, линиям одно, в точке не допускают никакого. Называя три протяжения: длина, ши-

[1] В. Я. Буняковский. Параллельные линии. Ученые записки Академии Наук, СПб, т. II, в. 3, 1853.

рина, высота, и разумея под этими названиями собственно три координаты, спешат таким образом преждевременные понятия сообщить словами, которым разговорный язык придает уже какое-то, хотя для точной науки еще неопределенное значение. В самом деле, как можно с ясностью себе представлять измерение в длину, когда не знаем еще, что такое прямая линия? Как можно говорить о ширине, высоте, ничего не сказав наперед о перпендикулах, о плоскости, как бывают перпендикулы в одной и в разных плоскостях? Наконец, если в точке нет ни одного протяжения, то что же в ней остается затем, чтобы она могла быть предметом суждения? Пусть и так, что прямую линию всякий ясно себе представляет, хотя не может еще дать отчета в своем понятии; но спрашивается, каким образом помощью прямой должен он назначать теперь одно протяжение в кривой линии, два в кривой поверхности?»

Все это нужно выяснить, нужно пролить свет на эти начала геометрии. Однако много легче поставить такие требования, чем их выполнить. Установление основных понятий (категорий), установление связей между ними, из которых их свойства могут выводиться строго логическим путем, — самая трудная задача во всякой дедуктивной науке, может быть труднее других в геометрии. Рассуждения, возникшие в связи с развитием идей Лобачевского, и привели к выяснению этих вопросов; но Лобачевский еще далеко не дал их разрешения.

Сочинение «Новые начала» состоит из тринадцати глав. Первые шесть глав посвящены изложению абсолютной геометрии и представляют собой развитие того, что изложено в первых пяти главах «Геометрии»: то же расположение материала и по существу та же его обработка. Лишняя глава обусловливается тем, что глава I посвящена первым понятиям в геометрии. Очень трудно точно передать ее содержание: правильные, глубокие мысли чередуются с соображениями, которые нельзя признать обоснованными, надежными в качестве исходной базы для построения геометрии. Ограничимся немногими указаниями.

Основными понятиями Лобачевский считает тело и соприкосновение тел. Тела, с его точки зрения, единственно только и существуют в природе; поверхности, линии, точки — это уже абстракции, связанные с соприкосновением тел. «Прикосновение составляет отличительную принадлежность тел»; мы называем тело геометрическим, если

отвлекаемся от всех других его свойств, кроме способности приходить в соприкосновение с другими телами.

Эти два понятия «тело» и «прикосновение», из которых Лобачевский хочет исходить, не могут быть признаны основными категориями, действительно пригодными для логического построения геометрии. Оперируя ими, Лобачевский, конечно, постоянно пользуется наглядными представлениями; никаких признаков, аксиоматически их характеризующих, он не дает. Но одну их особенность необходимо указать — это понятия т о п о л о г и ч е с к и е: тело остается таковым при всяком непрерывном его преоб-

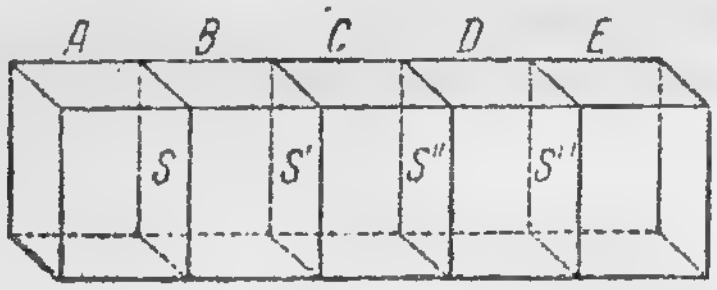


Рис. 32.

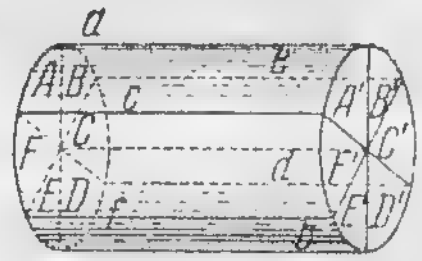


Рис. 33.

разовании: два тела, находящиеся в соприкосновении, сохраняют таковое, какой бы непрерывной деформации мы их не подвергали. Этому, может быть, не следует придавать чрезмерно большого значения; Лобачевский, конечно, в этом себе ясного отчета не отдавал; но в настоящее время нельзя не отметить, что Лобачевский пытается строить геометрию, исходя из топологических понятий; как уже указано выше, этот замысел виден уже в первом его сочинении, в «Геометрии».

«Два тела *A, B,* касаясь друг друга, составляют одно геометрическое тело *C*, где составные части *A, B* являются каждая порознь, не теряясь в целом *C*.

Обратно, всякое тело *C* произвольным сечением *S* разделяется на две части *A, B*. Здесь под словом сечение не разумеем какую-нибудь новую принадлежность тела, но то же прикосновение, выражая в этот раз уже деление тела на две прикосновенные части. Две части *A, B* будем называть еще сторонами сечения *S* в теле *C*.

Так можно себе представлять все тела в природе частями одного целого, называемого пространством.»

Совершенно ясно, что понятие *о сечении* этим отнюдь не определено. Мы не склонны здесь входить в критику, так как дефекты такого определения для современного

читателя совершенно ясны. Лобачевский отмечает *поступательные* и *обращательные сечения*. Поступательные сечения делят тело на части, «которые не касаются взаимно через одну» (рис. 32). Обращательные сечения это такие, каждое из которых увеличивает на два число частей, находящихся в соприкосновении (рис. 33). Это опять понятия топологические.

Рассмотрение различных видов соприкосновения приводит к понятиям «поверхность», «линия», «точка». Вслед за этим Лобачевский переходит к метрическим понятиям. Мы остановимся только на самых важных из них. Установив понятие о теле, Лобачевский определяет «одинаковость» (конгруэнтность) тел и «равенство» (равновеликость) тел. Два тела одинаковы, если могут без всякой с ними перемены наполнять одно и то же место; они равны, если могут быть составлены из равных частей. Обходя уже те трудности, с которыми сопряжено выяснение того, что значит перемещение «без всякой перемены», заметим, что определение равенства (равновеликости) все же дефектно по существу; но понадобилось еще около ста лет, чтобы это отчетливо выяснить. [1]

«Относительное положение двух точек называется *расстоянием* и назначается прикосновением двух тел, в которых допускаются все те перемены, которые не перемещают точек». Сюда относится и замена тела, содержащего эти точки, другим, которое их также содержит; расстояние определяется как инвариант движения, хотя не со всей необходимой четкостью.

Чтобы составить себе ясное представление о взглядах Лобачевского на основные понятия геометрии, необходимо эту главу прочесть полностью. Вся эта глава, замечает Энгель, [2] оставляет желать многого и не только потому, что изложение часто страдает неясностью, но главным образом потому, что в развитие предмета автор молчаливо принимает различные допущения, которые при установлении основных понятий не получили выражения.

Дать этим допущениям совершенно точное выражение — одна из самых трудных задач. И нельзя слишком строго судить попытку, которую Лобачевский делает для

---

[1] См. об этом В. Каган. О преобразовании многогранников. Второе изд. М. — Л. 1933.

[2] F. Engel. N. I. Lobatschefskij, стр. 319.

обоснования геометрии. Лобачевский несомненно также пользуется положениями, которые он приводит без доказательств. Он указывает, например, что в учении об измерении «нельзя обойтись без особых вспомогательных положений, которые принимают уже за аксиомы». Между тем аксиом, на которых он строит геометрию, он вовсе не перечисляет. Повидимому, это чрезмерная дань воззрениям Даламбера, опасение впасть в химерическую точность. Но эта точка зрения, может быть, вполне правильная в учебнике, не может получить применение в сочинении, посвященном научному обоснованию геометрии; Лобачевский и сам подчеркивает эту разницу в другом месте.

Располагая понятием о расстоянии, Лобачевский во второй главе определяет плоскость как геометрическое место точек, равноотстоящих от двух точек — «полюсов этой плоскости»; он показывает, как одни полюсы плоскости можно заменить другими; он очень искусно пользуется этим определением; но свойства плоскости, которыми он пользуется, не исчерпываются теми, которые в сочинении указаны и логически вытекают из этого определения.

Так и в дальнейшем своеобразные определения и логические приемы чередуются с соображениями интуиции, опираются на указание глаза. Вся тенденция логического обоснования геометрии, в том осуществлении, которое мы находим в «Новых началах», не удовлетворяет тем строгим требованиям, которые Лобачевский сам себе ставит. Но очень хорошо и то, что он их ставит; это было стимулом для настойчивых размышлений его последователей. Однако сам он этим требованиям не удовлетворил.

Дальнейшие главы, от II до VI, как мы уже указали, представляют собой развитие соответствующих глав «Геометрии»; они свидетельствуют, что Лобачевский в течение многих лет также настойчиво размышлял над вопросами общего обоснования геометрии, как и над своей «Воображаемой геометрией». Но легче было даже построить новую геометрию, чем строго обосновать старую.

Вторая часть «Новых начал» посвящена всему тому материалу, который зависит от постановки постулата о параллельных, и развертывается по преимуществу так, чтобы расчленение происходило только там, где это совершенно необходимо; всюду отмечается возможность включения евклидовой геометрии как частного случая в общую новую систему геометрии. В этом отношении основную

роль играют те предложения, которые допускают такую формулировку, что остаются в силе, как в собственно евклидовой, так и в неевклидовой геометрии. Это кажется странным, но становится ясным из следующего наиболее важного из этих предложений.

Представим себе три попарно параллельные прямые, не расположенные в одной плоскости. Три плоскости, проходящие через каждую пару этих прямых, образуют своеобразный триэдр [в специальном значении этого слова (рис. 34)]. Сумма внутренних двугранных углов этого триэдра всегда равна $2d$, независимо от того, понимаем ли мы параллелизм в евклидовом или в более общем его определении в воображаемой геометрии. И это имеет не только принципиальное, но и решающее значение: если представим себе поверхность, ортогонально секущую все лучи связки параллелей, и на ней будем разуметь под геодезическими ее сечения плоскостями, проходящими через лучи этой связки, то на ней сумма внутренних углов геодезического треугольника всегда равна двум прямым. Эту именно поверхность Лобачевский называет *предельной поверхностью;* формулированное выше предложение устанавливает, что на предельной поверхности сумма внутренних углов геодезического треугольника равна двум прямым; а это ведет к тому, что на предельной поверхности, независимо от того, принимаем ли мы на плоскости постулат Евклида или Лобачевского, всегда имеет место вся планиметрия Евклида. Значение этого факта уже достаточно было выяснено в главе XV; на нем строится вывод общих тригонометрических уравнений. Эти уравнения были изложены в «Exposition succincte», но до нас в этом виде не дошли. В мемуаре «О началах геометрии» вывод изложен в чрезвычайно схематическом виде; в «Воображаемой геометрии» он вовсе не дан; только здесь в «Новых началах» он изложен строго синтетически, с безукоризненной точностью, но, как всегда у Лобачевского,

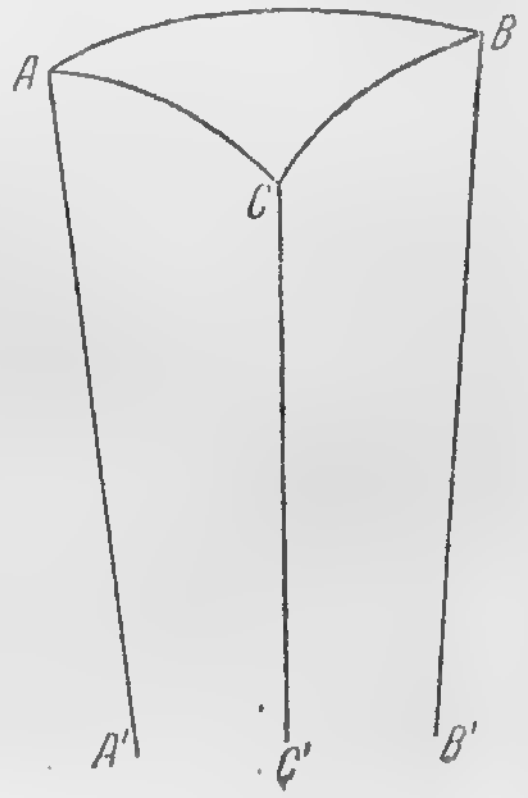


Рис. 34.

очень сжато. Уравнениями тригонометрии заканчивается глава XI.

В «Новых началах» неевклидова геометрия изложена несравненно более четко и ясно, чем в предыдущих сочинениях Лобачевского; и все же изложение еще страдает чрезмерной сжатостью.

Главы XII и XIII «Новых начал» по содержанию своему, можно сказать, не связаны с предыдущим. Энгель, который перевел «Новые начала» на немецкий язык, вовсе опустил эти главы. Содержание их заключается в следующем. Лобачевский рассматривает различные случаи решения прямолинейного и сферического треугольника и тщательно определяет предел погрешности при вычислениях семизначными логарифмами. Так как, однако, вычисления, смотря по заданиям, могут давать более или менее благоприятные результаты, то Лобачевский в последней главе (XIII) обращается к соображениям теории вероятностей и устанавливает вероятную ошибку вычислений. Это особенно существенно в тех случаях, когда данные, по которым вычисление производится, являются результатами кратных наблюдений, и потому сами устанавливаются только с некоторой вероятностью. Все результаты поясняются на довольно многочисленных примерах. Эти две главы в несколько переработанном и сокращенном виде Лобачевский опубликовал в 1842 г. на французском языке в журнале Крелля. [1]

Из трех частей, на которые сочинение «Новые начала» таким образом разбивается, наибольшее значение имеет вторая часть — построение основ воображаемой геометрии. Это изложение таково, что вдумчивый человек с общей математической подготовкой несомненно мог его понять. Однако уже «вступление» представляло некоторые затруднения читателю вследствие содержащихся в нем ссылок на «Воображаемую геометрию» (хотя читатель мог их здесь и опустить). Следующая за вступлением первая часть, очень своеобразная по своей конструкции, вызывающая немало возражений в определениях общих понятий, повидимому, еще более затрудняла читателя. Очень вероятно, что читатель останавливался раньше, чем дохо-

[1] Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées. (О вероятности средних результатов, полученных из повторных наблюдений.)

дил до главы VII. Насколько можно судить, никто этого сочинения в ту пору не прочитал.

Лобачевский тогда решил написать небольшое сочинение, короткое и возможно более доступное, которое читатель мог бы легче усвоить. Такое сочинение им было опубликовано в 1840 г. Это и была небольшая книга «Geometrische Untersuchungen», содержание которой, именно вследствие доступности, уже было изложено выше. В предисловии Лобачевский указывает, что первый опыт изложения этих идей появился уже в «Казанском вестнике» за 1829 г. «В надежде удовлетворить всем требованиям я затем занялся изложением этой науки в целом и эту свою работу я опубликовал в «Ученых записках Казанского университета» за 1836, 1837, 1838 гг. отдельными частями под заглавием «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Однако размер этой работы, повидимому, мешает моим соотечественникам проследить за этим предметом, который после Лежандра утратил интерес. Я же придерживаюсь мнения, что теория параллельных линий отнюдь не потеряла права на внимание геометров; я намерен поэтому изложить здесь самое существенное из моих исследований. Поэтому я считаю нужным уже вперед указать, что вопреки мнению Лежандра все другие несовершенства, как, например, определение прямой линии, оказываются здесь совершенно чуждыми этому вопросу и не имеют никакого влияния на теорию параллельных линий».

Такова задача, которую Лобачевский себе ставил, составляя «Геометрические исследования». Мы уже знаем, что эта небольшая книга тоже получила неблагоприятный отзыв (см. выше стр. 193); но, повидимому, именно эта брошюра обратила на себя внимание Гаусса. После смерти Гаусса в его библиотеке были найдены два экземпляра «Geometrische Untersuchungen». 23 ноября 1842 г. Гаусс предложил Лобачевского в члены Гёттингенского ученого общества, которое уже тогда имело значение академии; это значение оно сохранило и впоследствии. Лобачевский был избран, и Гаусс прислал ему диплом на это звание с собственноручным письмом. К сожалению, письмо Гаусса в бумагах Лобачевского не найдено. Однако не подлежит сомнению, что никаких указаний по существу его работы в нем не заключалось. В бумагах Гаусса сохранился ответ Лобачевского, в котором он бла-

годарит за избрание; но в этом ответном письме не содержится ничего по существу его научных интересов; между тем это наверное имело бы место, если бы о них писал Гаусс. Так или иначе, это было единственное удовлетворение, которое получил Лобачевский в результате своего научного творчества; удовлетворение не малое, — оно исходило от величайшего математика его времени.

По существу этим исчерпываются сочинения Лобачевского по геометрии; последняя работа «Пангеометрия», составленная Лобачевским в последний год его жизни, новых материалов уже не содержала.

Может быть, именно здесь, когда мы заканчиваем, по существу, изложение геометрического творчества Лобачевского, будет наиболее уместно остановиться на его философских взглядах, на его миросозерцании. Дать обстоятельную картину этого миросозерцания невозможно. Каких-либо произведений Лобачевского, которые были бы этому посвящены, не существует; вряд ли по условиям того времени, на посту, который он занимал, он имел возможность высказать полностью свои взгляды. Мы располагаем для характеристики его воззрений только отдельными высказываниями во вступлениях к различным его сочинениям и в речи «О важнейших вопросах воспитания». Не всегда взгляды, высказанные в различных местах, совпадают, не всегда они высказаны с полной определенностью. Есть, однако, вопросы, относительно которых взгляды Лобачевского никаких сомнений не оставляют. Лобачевский был решительным врагом всякого мистицизма, всякой метафизики в тогдашнем понимании этого слова. Это он в категорической форме высказывает как в «Речи», так и в разных других случаях. Очень важно отметить, что это отрицательное отношение к мистике Лобачевский высказывает как раз в то время, когда мистические настроения были в России чрезвычайно распространены. Ярким представителем их был князь Голицын, руководивший министерством духовных дел и народного просвещения, а также его противник митрополит Фотий и многие другие представители господствовавшей реакции и власти. Мистическое направление было широко распространено в различных кружках либеральной интеллигенции, в известном «Библейском обществе» и в масонских ложах. И в эту пору Лобачевский непосредственно после падения Магницкого выступает с решительной речью про-

тив всякого мистицизма, против всякой лженауки. Между тем, когда учение Лобачевского получило известность, его противники чаще всего выступали против него с обвинением в мистицизме. И эти обвинения шли с различных сторон, начиная с петербургских математиков и кончая даже таким человеком, как Н. Г. Чернышевский.[1] Однако это было совершенно ошибочно и имело своим источником полное непонимание идей Лобачевского. Нередко ему даже приписывалось учение о четырехмерности пространства в той его постановке, при которой оно действительно является мистическим. О четырехмерном пространстве у Лобачевского вообще никакой речи нет.

В тесной связи с этим стоит вопрос, не раз дискутировавшийся, о том, проявлял ли действительно Лобачевский признаки безбожия; его еще в юности в этом обвинял Кондырев. Дать прямой ответ на этот вопрос невозможно; но кто тщательно ознакомится со всеми материалами, относящимися к жизни и деятельности Лобачевского, вероятно, придет к заключению, что это обвинение не лишено основания. Конечно, последовательным атеистом Лобачевский не был. Но заслуживают внимания некоторые моменты, так сказать, отрицательного характера. Нигде, ни в каких своих высказываниях, ни в ученых сочинениях, ни в административных выступлениях, ни в письмах, ни даже в воспоминаниях друзей не встречается упоминания бога. Несколько слов с упоминанием о боге и религии нашли себе, впрочем, место в «Речи о важнейших вопросах воспитания»; но в таком выступлении это тогда, повидимому, было совершенно обязательным. А между тем, подобными ссылками пестрят в то время сочинения и выступления людей, склонных не только к ортодоксальным религиозным взглядам, но даже к какой бы то ни было форме деизма.

Может быть, в некоторой связи с этим стоит и другой вопрос, основной вопрос теории познания, для разрешения которого громадное значение имеют открытия Лобачевского и относительно которых его методологические взгляды не оставляют никаких сомнений.

Споры между нативистами различных формаций, т. е. людьми, признававшими познание, свойственное человеку

---

[1] Н. Г. Чернышевский. Избранные педагогические высказывания. Стр. 165—243, М. 1940.

от рождения, и эмпиристами, не признававшими никакого познания помимо опыта и чувственного восприятия внешней природы, были в ту пору очень сильны. Казалось бы, что после Галилея и Ньютона никакому нативизму уже не могло быть места. Между тем, редко кто из мыслителей того времени не отдавал дани нативистским настроениям. Особенно остро стоял вопрос об источниках математического и, в частности, геометрического познания. Убедительность истин этой науки была настолько очевидна, настолько достоверна, что приписать их происхождение опыту, который всегда считали ненадежным, казалось совершенно невозможным. Можно было отрешиться от веры в эмпирическое происхождение какого угодно знания; но основные истины, аксиомы геометрии представлялись настолько незыблемыми, что приписывать их результатам наблюдения и опыта решались весьма немногие мыслители. Немногие были в состоянии преодолеть воззрения, которые один из самых крупных ученых и мыслителей прошлого века — Гельмгольц, характеризует следующим образом: [1]

«Тот факт, что может быть построена такого рода наука, как геометрия, издавна привлекал особенное внимание всех, кто имел живой интерес к принципиальным вопросам теории познания. Среди отраслей человеческого знания нет другой, которая, подобно геометрии, казалось бы, явилась бы перед нами в совершенно законченном виде, в полном научном вооружении, как Афина Паллада из головы Зевса, — нет другой, пред эгидой которой так мало решались бы возвысить голос противоречий и сомнений. Геометрии совершенно чужда продолжительная и трудоемкая задача экспериментального накопления новых фактов, которая стоит перед естествознанием в более узком значении этого слова. Единственным методом ее научного продвижения является дедукция: один логический вывод следует за другим, и все же ни один человек со здравым рассудком не сомневается в том, что геометрические предложения должны получать чисто практическое применение в окружающей нас действительности:

---

[1] H. Helmholtz. Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorträge und Reden. Bd. II. Braunschweig, 1884 По-русски см. «Публичные лекции». М., 1892, а также в отдельном издании «О происхождении и значении геометрических аксиом». СПб., 1895.

в землемерии, в архитектуре, в машиностроительном искусстве. Математическая физика постоянно вычисляет пространственные соотношения различного рода; царит уверенность, что результаты построений и опытов подчиняются этим вычислениям, и до настоящего времени не было случая, чтобы эти ожидания обманули того, кто правильно вел вычисления, располагая для этого точными и достаточными данными».

Комплекс взглядов, содержащихся в этой тираде, отнюдь не выражает воззрений самого Гельмгольца. Самый тот факт, что наша геометрия существует, твердо стоит на своей, казалось бы, совершенно непоколебимой базе и в этом своем строении играет такую исключительно важную роль, является фундаментом всего точного знания; этот факт, как указывает Гельмгольц, всегда выдвигался в качестве убедительного и импонирующего примера того, что якобы возможно познание конкретных фактов, не имеющих за собой опытной базы. Отметив, однако, что этот взгляд выдвигают представители идеалистической философии и что на ней особенно категорически настаивает Кант, который в этом цикле вопросов стоял на чисто идеалистических позициях, Гельмгольц ставит главной задачей своей лекции этот взгляд опровергнуть.

В эпоху, когда складывались воззрения Лобачевского, Кант (1724—1804) принадлежал к числу мыслителей, действительно «владевших умами». Кант являлся, может быть, наиболее яркой фигурой в философии XVIII века, века страстной и упорной борьбы между идеями свободы воли и необходимости, между деизмом и атеизмом, между нативизмом и эмпиризмом; все его философское творчество пропитано стремлением примирить противоречия этих учений. По существу, Кант отнюдь не был последовательным идеалистом, и во многих вопросах естествознания и философии он приближался к материализму. Вместе с Лапласом он может считаться творцом (1755) наиболее устойчивой космогонической гипотезы. Но тем тверже, тем глубже были проникнуты идеализмом воззрения Канта на наше представление о пространстве и времени. Своеобразны, как известно, были его взгляды на этот вопрос, которые он проводил в своей «Критике чистого разума». Согласно этим взглядам, наши представления о пространстве и времени не только ингерентны (присущи) нашему сознанию, т. е. суть неотъемлемые его элементы, но более того,

они составляют совершенно необходимые формы, в которых наше мышление функционирует, вне которых мышление вообще невозможно. Лобачевский не только преодолел эти воззрения, не только уяснил себе полную их несостоятельность; он выдвинул против них доводы, о которых до создания новой геометрии не могло быть речи, которыми он наносит им решительный удар.

«Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами; врожденным — не должно верить».

Так пишет Лобачевский в введении к первому своему мемуару «О началах геометрии», и это он безоговорочно повторяет почти во всех своих сочинениях. Могло ли это быть иначе? Мог ли Лобачевский, создав *новую* геометрию, считая возможным, что в природе существует именно эта новая, а не старая «употребительная» геометрия, настойчиво отстаивая свое руководящее положение, что только опыт может решить, какая геометрия действительно имеет место в природе — мог ли он допускать, что основные геометрические представления составляют неотъемлемую часть нашего сознания, присущи нам от рождения?

Но более того, самое построение неевклидовой геометрии отнюдь не шло чисто формально-логическим путем. Это может казаться очень странным; но интуиция играла в этом творении геометра не меньшую роль, чем в свое время при создании классической геометрии. Не только Лобачевский, но и всякий, кому этот процесс был совершенно ясен, не мог не видеть, что наша мысль способна работать отнюдь не только в формах старых установившихся пространственных представлений, но в совершенно иных, глубоко отличных образах, с некоторым вероятием претендующих на преимущество в мироздании как целом, уступающим место старым представлениям только в пределах ничтожного, непосредственно нам доступного уголка вселенной.

И весьма замечательно, что всякий, усваивавший геометрию пространства Лобачевского, легко привыкал видеть в ней все так же отчетливо, как в нашем обычном пространстве, в «употребительной» классической геометрии. А если так, то какая может быть речь о простран-

ственных представлениях, как об ингерентных, нашему сознанию органически свойственных, от рождения каждому из нас присущих формах мышления? Если раньше для людей, материалистически мыслящих, было ясно, что наши геометрические представления сложились и окрепли в многовековом опыте, то теперь, в свете открытий Лобачевского, вопрос стал совершенно иначе: опыту, измерениям, проникающим гораздо дальше, чем это было доступно не только в повседневной жизни, но и в прежних астрономических наблюдениях, надлежало еще установить, должны ли быть во вселенной как в целом — в макрокосмосе — сохранены геометрические соотношения классической геометрии, или они должны быть заменены теми, которые создал Н. И. Лобачевский; и в благоприятном случае с каким значением постоянной k новая геометрия должна здесь функционировать. Установки Канта в их многообразных модификациях, служившие последним прибежищем идеалистической философии, рассеялись как дым. Это блестяще выяснил Гельмгольц в своей знаменитой речи, не оставив «идеалистических установок Канта» даже слепым.

Впрочем в широких кругах это стало ясно только после того, как идеи Лобачевского были усвоены и признаны; но об этом речь еще впереди. Для самого же Лобачевского эта установка была необходимой предпосылкой всего его творчества. Нужно сказать, что отрешение от того, что считалось извечным, «от творения» присущим человеческому сознанию, неизбежно влекло за собой отказ от многих других навязанных представлений. В высказываниях Лобачевского, безоговорочно отвергающих всякие априорные знания, слышатся и другие недосказанные мысли.

XX. Сочинения, не относящеся к геометрии

Мы уже дважды указывали, что в период, когда Лобачевский управлял университетом, появились все опубликованные им сочинения, кроме заключительной работы «Пангеометрия». Почти все исследователи, изучавшие сочинения Н. И. Лобачевского, интересовались, конечно, прежде всего его геометрическими работами. Хорошо известна также его «Алгебра», так как она была выпущена отдельным изданием. Что касается остальных сочинений, не от-

носящихся к геометрии, то нужно сказать определенно, что они до настоящего времени еще достаточно не изучены. Такое изучение требует значительной и притом коллективной научно-исследовательской работы. Эта работа в настоящее время выполняется в связи с изданием полного собрания сочинений Лобачевского, в котором IV том будет содержать «Алгебру», а V — остальные сочинения Лобачевского, не относящиеся к геометрии. «Алгебра» в настоящее время подготовлена уже к изданию профессором Казанского университета Н. Г. Чеботаревым. Им составлена вводная статья, содержащая историко-библиографические сведения об этом сочинении и краткий обзор его содержания. С разрешения Н. Г. Чеботарева мы ею пользовались при составлении настоящего реферата об этом сочинении.

Сочинение «Алгебра или исчисление конечных» было подготовлено Лобачевским к изданию еще в 1825 г. В архиве Казанского университета сохранилось дело о представлении этого сочинения к печати. 19 сентября 1825 г. Лобачевский направил рукопись в Физико-математическое отделение и ходатайствовал о его напечатании в качестве учебника для гимназий. В совет поступил также отзыв профессора Никольского, в котором сказано: «Хотя по сбъему своему сия алгебра [содержит] только 86 четвертин мелкого письма, но автор в сем небольшом пространстве поместил все нужные статьи и обработал их своим способом с такою точностью и всеобщностью, что трудно сказать, что бы еще к ним прибавить следовало; а потому она с большою пользою может быть введена в употребление в гимназиях». Совет баллотировал (20 голосов за и 2 против), одобрил рукопись к печатанию и представил ее на благоусмотрение попечителя. Однако задержка на этот раз произошла в самом университете. Чем это было вызвано, остается невыясненным. По истечении почти года Лобачевский в совете выразил свой протест против этого отношения к его сочинению, сказав, что сожалеет о напрасном труде. Эта рукопись сохранилась в архиве при указанном деле. Она содержит четырнадцать глав. С течением времени Лобачевский, очевидно, пришел к убеждению, что сочинение это в качестве руководства для гимназий не подходит, несколько его переработал, значительно дополнил и приспособил для преподавания в университете. В 1835 г. он выпустил ее в свет под названием,

приведенным выше, — «Алгебра или исчисление конечных». К прежнему тексту прибавлены четыре главы (прежняя глава XIV включена здесь в последнюю главу более общего содержания). Вот как Лобачевский характеризует содержание «Алгебры» в своем предисловии.

«Всякого рода вычисление делается с той целью, чтобы найти неизвестное; а потому правила для вычислений соединяются в одно учение — аналитику. Ее можно разделить на арифметику, алгебру и дифференциальное исчисление. В арифметике начинают с примеров на числах; потом, соблюдая постепенность в понятиях, вместо чисел, чтобы разуметь их произвольными, в алгебре употребляют буквы, избегая однакож способа бесконечно малых, или границ, как такового, который требует более усилий от ума и составляет уже последнюю и высшую часть аналитики. В этом смысле алгебра будет также наука, которую Ньютон назвал *общая арифметика*, чтобы отличить от арифметики на числах, и которую столько же справедливо можно назвать *вычисление конечных*, в противоположность с дифференциальным, или вычислением бесконечно малых, где являются неоспоримы новые начала, под каким бы видом ни старались их представлять, желая соблюсти строгость, эту существенную принадлежность всякого математического учения».

Хотя Лобачевский, таким образом, отличительной чертой алгебры считал то, что она оперирует только «конечными», т. е. избегает бесконечно малых, во второй половине курса, главным образом в теории бесконечных рядов («строк»), он не может обойтись без бесконечно малых.

Из тех двух сочинений, которые в то время имели для построения курса алгебры руководящее значение, — «Алгебры» Эйлера[1] и «Курса алгебраического анализа» Коши[2] — сочинение Лобачевского стоит гораздо ближе к книге Эйлера, хотя по содержанию гораздо богаче ее. Первые тринадцать глав содержат формальную теорию арифметических действий над положительными и отрицательными числами и алгебраическими выражениями, решение уравнений первой степени, учение о степенях и корнях, о логарифмах. Глава XIII посвящена тригонометри-

---

[1] L. Euler. Vollständige Anleitung zur Algebra. St. Petersburg, 1802
[2] A. Cauchy. Cours d'analyse algebrique. Paris, 1821.

ческим функциям, которые Лобачевский определяет при помощи показательных функций известными формулами Эйлера. Глава XV содержит начала теории конечных разностей, а две последние главы (XVI и XVII) посвящены решению уравнений высших степеней.

Предисловие к первоначальной рукописи Лобачевский начинает следующими словами.

«Новая книга начал математики не должна напрасно умножать число существующих, потому что их и без того уже много. Читателю довольно слегка пробежать мою алгебру, чтобы открыть в ней большое различие со всеми изданными до сих пор и не думать более, чтобы намерение было только собрать и повторить то, что только сказано другими. Далее он не замедлит увидеть, что, кроме старания сделать лучший выбор, я прибавил еще и много нового».

Оригинальность мысли, стремление и умение внести новые точки зрения и новые факты во все, чем он занимался, составляло характерную черту Лобачевского Но прежде чем указать, что нового и своеобразного внесено Лобачевским в курс алгебры, мы приведем еще один отрывок из того же предисловия к сохранившейся рукописи, характерный для его педагогических взглядов.

«Два года читается алгебра в Казанской гимназии под моим руководством, и в последнее время я имел всю причину восхищаться успехами детей. Видел, что они тверды в правилах, понимая все, совершенно уверенные в своих знаниях, отвечают со рвением на вопросы, с намерением даже сысканные, разрешают их легко, не подозревая, что в них может скрываться затруднение, достаточное занять взрослых. Так я уверен в той истине, что понятия не должны приобретаться навыком; но должны быть переданы с первого раза во всей их обширности, с точностью, ясностью и определенностью, а потом уже утвердиться упражнением, чтобы могли через то глубже запечатлеться в памяти и с легкостью быть применяемы в дальнейших исследованиях. Вот главное правило в искусстве преподавать математику, которой трудность единственно в отвлеченности и обширности понятий, которая, чтобы быть легкой, требует от нас только того, чтобы мы не переставали судить, употребляя знаки, как сокращения для выражения умственных представлений. Такому правилу, однакож, не следовали до сих пор в началах,

потому что думали облегчить учение детей, упражняя не преимущественно примерами решения задач, представляя им самим отвлекать для сего нужные понятия и со временем только возвратиться назад, чтобы пополнить то, что было некогда сказано им недостаточно из недоверчивости к их способностям. Требование столь чрезмерное, что не всякий и тот мог его исполнить совершенно, кому после удавалось уходить далеко от начал. Затем готов я думать, что естьли математика, столь свойственная уму человеческому, остается для многих безуспешной, то это по справедливости должно приписать недостаткам в искусстве и способе преподавания. Не утверждая с дерзостью, чтобы я постигнул совершенство в последнем, но хочу надеяться, что избрал прямую дорогу к цели, впрочем ожидаю подтверждения от других».

Вряд ли может подлежать сомнению, что эти установки возникли под влиянием статей Даламбера, о которых мы уже говорили выше (гл. VIII).

Что же внесено Лобачевским нового в курс алгебры? Указания на это мы находим уже в предисловии к печатному изданию алгебры. Излагая решение системы линейных уравнений, Лобачевский дает очень своеобразный прием для составления определителя любого порядка. По указанию Н. Г. Чеботарева, этот прием, сущность которого заключается в предварительной замене индексов показателями, был впервые опубликован Коши в 1815 г. Нет, однако, основания сомневаться в том, что Лобачевскому, который приписывает этот прием себе, работа Коши не была известна. Медленно доходили до Казани результаты новейших исследований. Так, Лобачевский сам указывает, что ему еще «не случалось видеть сочинение Штурма (об отделении корней уравнения), хотя мемуар Штурма был опубликован в 1829 г. В ст. 232 Лобачевский говорит: «Общее решение уравнений далее четвертой степени еще до сих пор не найдено»; ему, таким образом, еще не известен мемуар Абеля, также относящийся к 1829 г., в котором установлена невозможность общего решения уравнений выше 5-й степени в радикалах.

В теории двучленных уравнений Лобачевский дает усовершенствованный прием для вычисления так называемых гауссовых периодов. Этот прием был им раньше (1834) опубликован в «Ученых записках». Мы уже упоминали об этом мемуаре (стр. 49). Не останавливаясь на других

моментах меньшего значения, укажем предложенный Лобачевским в главе XVII прием вычисления корней алгебраического уравнения. В настоящее время этот прием, получивший широкое распространение, известен под названием «метода Греффе». Между тем, мемуар Греффе, в котором этот способ разработан, опубликован позже (1837), чем «Алгебра» Лобачевского.

Обращаясь к остальным работам Лобачевского, не относящимся к геометрии, мы вынуждены ограничиться только краткими указаниями их содержания.

Две из этих работ не столько по содержанию, сколько по своему возникновению находятся на рубеже геометрии и других отделов математики.

Выше было указано, что сочинение «Новые начала» содержит соображения, относящиеся к установлению вероятной ошибки, происходящей при решении треугольников при помощи логарифмов. Эти рассуждения в несколько переработанном виде Лобачевский опубликовал в 1842 г. на французском языке в журнале Крелля.[1]

Второй мемуар, до некоторой степени примыкающий к сочинению «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (см. стр. 196), опубликован Лобачевским в 1852 г. в «Ученых записках Казанского университета» под заглавием «О значении некоторых определенных интегралов». В 1855 г. этот мемуар был опубликован Лобачевским также на немецком языке в так называемом «Архиве Эрмана».[2] Хотя вычисление ряда определенных интегралов выполнено в этой работе без помощи геометрии, но не подлежит сомнению, что к этой теме Лобачевского привели многообразные вычисления определенных интегралов, которые он производил средствами «воображаемой геометрии».

Далее, три мемуара посвящены учению о сходимости бесконечных рядов.

Лобачевский начинает с тригонометрических рядов, которые в ту пору занимали умы. Его не удовлетворяют доказательства сходимости этих рядов, предложенные Коши, Дирихле и Дирксеном. В 1834 г. он посвящает

---

[1] Sur la probabitité des résultats moyens tirés des observations répétées. (О вероятности средних результатов, полученных из повторных наблюдений.)

[2] «Archiv für die wissenschaftliche Kunde von Russland» herausgegeben von A. Erman.

этому вопросу мемуар, помещенный в «Ученых записках Казанского университета» «Об исчезании тригонометрических строк».

В следующем 1835 г. Лобачевский помещает также в «Ученых записках» обширное исследование, посвященное общей теории сходимости рядов: «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значениям функций от весьма больших чисел».

Основная задача, которую Лобачевский здесь себе ставит, заключается в установлении критерия сходимости в том случае, когда отношение двух последовательных членов ряда стремится к единице. К этому же вопросу Лобачевский затем возвращается в 1841 г. В виде приложения к изданию наблюдений Метеорологической обсерватории Казанского университета,[1] которым руководил профессор Э. Кнорр, Лобачевский помещает мемуар «Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen».[2] Этот мемуар в 1842 г. министром народного просвещения и президентом Академии Наук был направлен Физико-математическому отделению Академии с просьбой дать отзыв об этой работе. Собрание Отделения и на этот раз поручило дать отзыв об этом труде академику Остроградскому. Очень возможно, что инициатива этого принадлежала Мусину-Пушкину. Обстановка уже была другая. Если бы Остроградский ознакомился с появившейся в 1840 г. работой Лобачевского «Geometrische Untersuchungen», то он, конечно, не столкнулся бы с трудностями в усвоении его идей. Но Остроградский остался верным себе. В заседании 10 июня он сделал доклад, что, согласно желанию министра и президента, он прочел мемуар о сходимости рядов и нашел, что эта новая работа Лобачевского сходна с его старыми работами; автор здесь пренебрегает первыми началами точного рассуждения, как бы умышленно затрудняя возможность следовать за ним, и эти недостатки ничем не искупаются — ни новизной результатов, ни простотою в изложении того, что уже известно. В виду этого Остроградский считает, что этот мемуар не может заслужить одобрение Академии.

Классической проблеме механики посвящен мемуар,

---

[1] «Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlichen Russischen Universität Kasan». 1841.

[2] «О сходимости бесконечных рядов».

опубликованный Лобачевским в 1834 г. в «Ученых записках Московского университета»: «Условные уравнения для движения и положения главных осей обращения в твердой системе». Мемуар содержит своеобразный вывод уравнений движения твердого тела и основных свойств главных осей вращения.

В июне 1842 г. происходило полное солнечное затмение. Для его наблюдения Казанским университетом была снаряжена экспедиция в Пензу в составе астронома наблюдателя Ляпунова, профессора физики Кнорра и Лобачевского. В том же 1842 г. Лобачевский опубликовал в «Ученых записках Казанского университета» отчет об этой экспедиции «Полное затмение солнца в Пензе 12 июня 1842 г.» Отчет содержит, кроме изложения деятельности экспедиции, обзор взглядов на сущность солнечной короны.

Особняком стоят две работы Лобачевского, не находящиеся в прямой связи с его научными интересами. Первая из них опубликована им еще в 1828 г. в журнале «Казанский вестник»: «О резонансе или взаимном колебании воздушных столбов». Эта статья представляет собою только реферат работы английского физика Уитстона.

Вторая работа представляет собою отзыв о докторской диссертации А. Ф. Попова, составленный Лобачевским в 1845 г. Она помещена в виде приложения к печатному изданию этой диссертации под заглавием «Подробный разбор рассуждения, представленного магистром А. Ф. Поповым под названием «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду». По этому отзыву Попов получил степень доктора чистой математики. Сам Лобачевский этой степени никогда не был удостоен.

Все эти работы, конечно, не имеют того значения, которое приобрели геометрические открытия Лобачевского. Но многие из них содержат идеи, весьма своеобразные для того времени. Так, Лобачевский, повидимому, первый отличал непрерывную функцию от дифференцируемой; он первый оперирует понятием, по существу не отличающимся от равномерной непрерывности: как уже указано выше, он дал способ приближенного решения алгебраических

---

[1] Wheatstone. On the resonances or reciprocated vibrations of columns of air. Quarterly Journal. 1828.

уравнений, мало отличающийся от того, который несправедливо получил распространение под названием способа Греффе. Нужно, однако, еще раз сказать определенно, что эти работы Лобачевского еще очень мало изучены. Но несомненно, что печать своеобразной оригинальной мысли лежит на всем, что он писал; а тематика обнаруживает многообразие его научных интересов.

Наконец, две статьи, опубликованные Лобачевским, не относятся к математическим наукам; отметим их здесь, хотя мы уже о них упоминали выше. Это — предисловие к первой книжке «Ученых записок, издаваемых Казанским университетом» за 1834 г. и «Речь о важнейших предметах воспитания», прочитанная 5 июня 1828 г. (опубликованная в «Казанском вестнике», ч. 8, 1832).

ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ЖИЗНИ

XXI. Уход из университета

В 1841 г. исполнилось двадцать пять лет со дня утверждения Н. И. Лобачевского экстраординарным профессором. Согласно уставу, это давало ему право на пенсию с сохранением возможности оставаться на службе. Пенсия ему действительно была предоставлена; он сохранил кафедру и получил звание заслуженного профессора. В 1845 г. Лобачевского вновь избирают ректором, на этот раз единогласно — явление очень редкое в истории университетов.

В апреле того же 1845 г. Мусин-Пушкин был назначен попечителем Петербургского учебного округа; он оставил Казань, управление округом было временно поручено Лобачевскому. Но 7(19) июля 1846 г. исполнилось тридцатилетие его службы; согласно уставу занимаемая им кафедра должна была с этого дня считаться свободной, служба при университете законченной. Однако совет университета возбудил ходатайство перед министерством народного просвещения о том, чтобы Лобачевский был оставлен на кафедре еще на пять лет, а вместе с тем оставался бы на посту ректора до истечения срока избрания. «Совет почитает, — так сказано в протоколе, — за особенную честь для университета иметь в числе профессоров столь отличного ученого и опытного педагога».[1] Это были не только слова восхваления, обычные в юби-

---

[1] Э. П. Янишевский. Назв. соч., стр. 56.

лейные моменты ученого. В научной среде чувствуют силу таланта. Каковы бы ни были препятствия, которые возникали при печатании работ Лобачевского, каковы бы ни были отзывы о них в Казани, в профессорской среде хорошо сознавали, что в лице Лобачевского университет имеет выдающегося ученого. Еще не было оценено его творчество, в нем еще не чувствовали гения, еще были глубоки сомнения, связанные с его творчеством, но все сознавали, что Лобачевский человек высокого научного значения.

Однако ходатайство совета удовлетворено не было. Вместо этого, 28 августа того же 1846 г. последовало назначение Лобачевского помощником попечителя Казанского учебного округа, с увольнением от должностей ректора и профессора. Что было причиной отказа? Стояло ли министерство на точном исполнении закона, или оно рассматривало новое назначение как повышение по службе, или, наконец, Лобачевским в министерстве уже не были вполне довольны. Вот что об этом пишет профессор Вагнер в своих «Воспоминаниях»:[1] «В настоящее время еще рано рассказывать все дело о замене Лобачевского новым ректором; нужно указать только, что, может быть, некоторой, вовсе не главной причиной этой замены были неудовольствия нескольких членов совета на Лобачевского, возникшие за последние годы». Но в чем же заключалась главная причина? Назначение Лобачевского помощником попечителя, сказано в тех же воспоминаниях Вагнера, «было неожиданным для всех тех, кому была не известна закулисная сторона этого дела»; дело в том, что «это место было необходимо другому, и вследствие этого была начата интрига, которая разыгралась за пределами Казанского университета». Если детали этой «интриги» остаются невыясненными, то существо дела очень прозрачно вырисовывается как в «Воспоминаниях» Вагнера и сына Лобачевского, так и в «Записке» Янишевского. Мусин-Пушкин ушел еще до этого инцидента. Прямой и самостоятельный Лобачевский был уже мало угоден министерству. Гораздо более подходящим казался покладистый профессор И. М. Симонов, избрание которого, нужно думать, было предрешено. Незначительным большинством он, действительно, был избран, но продержался

[1] Н. П. Вагнер. Назв. соч., стр. 28.

недолго. При следующих выборах он был забаллотирован. Вагнер говорит о нем, быть может, даже слишком пренебрежительно. Нельзя не указать, что Лобачевский за исполнение обязанностей ректора в течение почти 20 лет, никакой добавочной платы не получал. Его «жалование» ограничивалось 1142 р. в год. Между тем, Симонову, вскоре после его назначения было прибавлено за исполнение обязанностей ректора 1000 р. Лобачевскому за исполнение обязанностей помощника попечителя было назначено только 800 р. (столовых).

Но не в этом, конечно, была суть дела. Лобачевский, с одной стороны, должен был покинуть университет, преподавательскую деятельность, которой он очень дорожил; а с другой стороны, он был назначен не попечителем, а только помощником попечителя, что не давало ему достаточного веса в управлении университетом и округом. Это и не замедлило сказаться. Интересно, что очень скоро после его вступления в исполнение новых обязанностей, у него стали возникать трения с советом университета; вряд ли может подлежать сомнению, что в этом сказалось влияние Симонова. Три ректора последовательно сменили друг друга в Казанском университете — К. Ф. Фукс, Н. И. Лобачевский и И. М. Симонов. Как различны были эти три руководителя университета! К. Ф. Фукс, живой, очень культурный человек с высокими научными интересами, но безвольный исполнитель распоряжений Магницкого; деятельный, самостоятельный, беззаветно преданный университету, Лобачевский, человек огромного научного творчества; наконец угодливый, мало даровитый Симонов.

Опасения Лобачевского, что ему недолго предстоит действительно руководить делом просвещения в Казанском округе, очень скоро оправдались. Через год попечителем был назначен старый казанский помещик, генерал В. П. Молоствов. Почему же округа не доверили Лобачевскому, почему этот высоко просвещенный человек, с таким успехом, с такой продуктивностью и с таким признанием управлявший университетом в течение двадцати лет, был подчинен казанскому генералу? Это объясняется очень просто. На Западе уже вновь нарастали революционные настроения, даже в Германии подготовлялась революция 1848 г. А вместе с этим у нас крепла реакция, особенно усилившаяся в последние годы царствования

Дом, принадлежавший Лобачевскому, на Проломной улице в г. Казани
(ныне ул. Баумана; в настоящее время не существует)

Николая I. Министром народного просвещения, вместо Уварова, ставшего уже слишком либеральным, был назначен Ширинский-Шихматов.[1] В сущности, правление Шихматова немногим отличалось от деятельности Магницкого; возможно, было меньше ханжества, но значительно больше общих репрессий. Опять очень остро стал вопрос о закрытии всех русских университетов.

Таким образом, между двумя эпохами тяжелой реакции — Голицына (Магницкого) и Шихматова — в 20-летний период сравнительно более спокойной жизни университета, когда была некоторая возможность сделать из него настоящий рассадник просвещения, университетом управлял Лобачевский. С именем Лобачевского связано внешнее и внутреннее благосостояние университета в период его подъема, создание этого подъема. Очень характерно, что это время было также периодом расцвета самой Казани. В эти годы особенно окрепла роль Казани как центра, соединявшего Европу и Азию, как главного города восточной России. Но это благосостояние к концу 40-х годов стало падать, ухудшилось и благополучие университета. Быстро развернувшееся на Волге и Каме пароходство привело к тому, что небольшие прежде города Самара и Саратов стали приобретать большое значение, успешно конкурировали с Казанью, даже скоро ее опередили. Того значения, которое Казань имела раньше, она уже больше не получала.[2] Имя Лобачевского заслуженно запечатлелось в Казани и в ее университете.

Лобачевский скоро убедился, что с Молоствовым у него не могут установиться такие отношения, которые его связывали с Мусиным-Пушкиным. Подчиненное положение при глубоких расхождениях во взглядах было для него невыносимо. Повидимому, не слишком дорожил его участием в управлении округом и Молоствов. Лобачевский постепенно стал уклоняться от ответственной работы; оставаясь, правда, на службе, он стал играть роль скорее консультанта, нежели действительного помощника попечителя, который с этим охотно мирился. Это, конечно, снижало авторитет Лобачевского; только небольшое число товарищей и главным образом студенты поддерживали тот авто-

[1] О Ширинском-Шихматове говорили, что его вступление в управление министерством означало шах и мат русскому просвещению.

[2] Н. П. Загоскин. Казанское захудание. «Волжский вестник», № 211, 1895.

ритет, с которым к Лобачевскому относились в годы, когда он управлял университетом. Ярким примером влияния, которым Лобачевский пользовался у студентов даже после своего ухода из университета, служит следующий инцидент. Вскоре после того, как Молоствов завел в университете свои порядки, возникли первые в Казани студенческие волнения. Студенты собрались в рекреационном зале и, осуждая в резких выражениях Молоствова, требовали изменения его распоряжений. Ни Молоствов, ни Симонов, прибывшие на эту сходку, не были в состоянии успокоить студентов. Пригласили Н. И. Лобачевского; в виц-мундире, со шляпой в руках, Николай Иванович спокойно вошел в аудиторию; самое его появление внесло успокоение, он очень скоро урезонил студентов.[1] Когда Лобачевский отошел от учебной и административной работы, ему было только 53 года, но тяжелые переживания сильно отразились на его здоровьи, очень его состарили. Лобачевский не порвал связи с университетом; он участвовал в диспутах, приезжал на важные заседания, читал публичные лекции; но он больше ушел в интересы семьи и быта.

XXII. Семейная жизнь. «Пангеометрия». Кончина Лобачевского

Свою юность Лобачевский провел в условиях очень ограниченных средств; получив звание адъюнкта, а затем профессора, он, по рассказу сына,[2] вместе с братом Алексеем Ивановичем стал вести более широкий, даже светский образ жизни. Уже в возрасте около 40 лет (1832) Николай Иванович женился на молодой девушке, Варваре Алексеевне Моисеевой, принадлежащей к одному из наиболее видных дворянских семейств Казани. Она принесла в семью значительные средства, главным образом в виде трех имений в различных губерниях и большого трехэтажного дома в Казани на Проломной улице. Лобачевские вели широкий образ жизни. «Дом наш, — рассказывает Н. Н. Лобачевский, — был всегда полон отборным обществом. Повара считались лучшими». Варвара Алексеевна была образованной женщиной; дом Лобачевских был от-

[1] Воспоминания сына Н. И. Лобачевского, стр. 166.

[2] Там же, стр. 158. Следует отметить, что к этим воспоминаниям нужно относиться с некоторой осторожностью: кое-что в них несомненно неточно.

крыт как для аристократов, так и для простых смертных.

Однако, уже с конца 30-х годов их материальное положение ухудшается. В письмах Лобачевского к И. Е. Великопольскому, брату Варвары Алексеевны по матери, слышатся настойчивые жалобы на нужду в деньгах. Поскольку можно судить по воспоминаниям сына Лобачевского и по сохранившимся письмам Николая Ивановича к Великопольскому,[2] это ухудшение материального положения Лобачевских, которое позже очень обострилось, произошло по следующим причинам. Так как управление небольшими имениями, находившимися в различных губерниях, было очень затруднительно, то Лобачевские решили эти имения продать и приобрести одно имение вблизи Казани. И. Е. Великопольский был доверенным лицом, при посредстве которого производилась продажа имений Варвары Алексеевны. Часть денег, поступивших по одной продаже, была прислана Лобачевским, и на эти средства они приобрели вблизи Казани, на Волге, небольшую деревню «Беловолжская слободка». Это имело для Лобачевского еще то значение, что дало ему возможность заняться сельским хозяйством, которое его очень занимало и действительно служило прекрасным отвлечением от напряженной умственной и административной работы. Ко всякому делу, за которое Лобачевский принимался, он относился с большим увлечением. Он решил поставить хозяйство в своей деревне очень культурно. Он выстроил дом, флигель, прекрасные амбары, каретники, каменную ригу и овчарню; развел скот, удобрял землю, разбил сад, построил мельницы и даже плотину, чтобы использовать воду горных ключей. В это дело он вложил такую же энергию, как и в университетское строительство; хозяйство велось культурно, можно сказать, с научной постановкой дела.

Сельское хозяйство отнюдь не было Лобачевскому чуждо. Мы уже знаем, что он был деятельным членом Экономического общества; его деятельность в этом обществе была очень многосторонней; главным образом она была сосредоточена на сельскохозяйственных вопросах. Нужно удивляться той разносторонности интересов, тому

---

[1] Н. П. Вагнер. Назв. соч., стр. 16.

[2] Б. Л. Модзалевский. Н. И. Лобачевский, Письма его к И. Е. Великопольскому. Казань, 1902.

вниманию и тому труду, который в это дело вложил Лобачевский. По поручению Общества он делал доклады о способе кормления скота, о посеве хлебных и технических культур, о сохранении на зиму картофеля, об устройстве водяных мельниц. Нельзя достаточно надивиться, как он мог это совместить со строительными работами, которыми был в эту пору занят, с научными исследованиями, которые он вел. Во всяком случае в управление собственным имением он внес уже технические познания, которые он отнюдь не хотел оставить оторванными от практики и считал необходимым осуществить в своем хозяйстве.

Между тем имение еще не было оплачено, а от Великопольского деньги не приходили. Это был человек совсем другого уклада; он много жил в столице, был театралом, даже поэтом, страстным игроком, широко расходовал средства. И деньги Лобачевского уплыли вместе с его собственным имуществом: как видно из одного официального документа, приложенного к переписке, В. А. Лобачевской пришлось даже его выручать. Чтобы выйти из затруднительного положения, пришлось заложить имение, а затем даже дом в Казани. Очень возможно, что размах, который Лобачевский взял в своем хозяйстве, и без того не соответствовал ни его средствам, ни размеру имения. Соседи, привыкшие жить по старине, злорадствовали и немало отравляли Лобачевскому жизнь.

С прекращением службы в университете положение значительно ухудшилось. Уменьшилось содержание, которое Лобачевский получал по службе. Хотя Лобачевский все еще числился на службе, Молоствов настоял, чтобы он освободил казенную квартиру. Пришлось переехать в свой дом, что снизило его доходность. Это вызвало затруднения в уплате процентов по закладным. Николай Иванович этого не предусмотрел, в газетах появилось объявление о продаже дома для погашения задолженности. Варвара Алексеевна, которой услужливые друзья поспешили принести объявление, была очень удручена. Пришлось сделать заем у частного лица, положение усложнялось; позже, уже после смерти Николая Ивановича, «Слободку» пришлось продать.

Но беда обыкновенно приходит не одна. У Лобачевских была большая семья — четыре сына и три дочери Одна из дочерей умерла очень рано. Вскоре после ухода Лобачевского из университета заболел его старший сын,

его любимец, очень на него похожий. Заболел он туберкулезом легких; все усилия спасти его не помогли, он скончался 19 лет на руках своего товарища Владимирского. Сама Варвара Алексеевна незадолго до этого перенесла тяжелую болезнь. Во время гибели старшего сына она была беременна; повидимому в связи с этим несчастием, она родила болезненного сына, который однако дожил до тридцати лет.

Когда-то веселый, всегда живой и бодрый, Николай Иванович состарился, даже быстро одряхлел. Вне всякого сомнения, вынужденное бездействие этому много способствовало. Лобачевский всегда с большим вниманием, даже с предупредительностью относился ко всем, кто имел к нему нужду — к товарищам, к подчиненным, может быть, даже более всего к студентам; об этом свидетельствуют многие эпизоды, которыми пестрят посвященные ему воспоминания. Теперь он чувствовал себя оставленным почти всеми, с которыми прежде работа приводила его в соприкосновение, кто прежде так охотно посещал его гостеприимный дом. Не выпуская изо рта своей длинной трубки, он сидел угрюмый и мрачный. Самым тяжелым было то, что он стал терять зрение. Часто ставят это в связь с его бисерным почерком. Конечно, это обстоятельство могло иметь некоторое значение; но главная причина была не в том. Неустанная работа, сильное умственное напряжение вызвали ранний склероз; этим объясняются и другие явления, которые скоро обнаружились. Изредка только то или иное проявление к нему внимания, та или иная удача приносили ему утешение, на некоторое время поднимали его настроение. Он получил высокий орден (правда, через год после того, как этот же орден получил Симонов). По случаю столетнего юбилея Московского университета он был избран почетным его членом; еще раньше он был избран почетным членом Казанского университета. Но наиболее приятным было поручение написать статью в сборнике, который предполагалось выпустить ко дню пятидесятилетия Казанского университета. Когда решение об издании такого сборника было принято, Лобачевский сам предложил дать для этого сборника статью, и предложение было принято в очень лестных для Лобачевского выражениях. Он усердно принялся за составление этой статьи. Празднование юбилея не состоялось, потому что

царь нашел это преждевременным. Но сборник был выпущен в свет в 1856 г., а в нем на французском языке появилась статья под названием «Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse de parallèles.[1] Но еще раньше, в 1855 г., в «Ученых записках Казанского университета» появился и русский текст того же сочинения под кратким названием «Пангеометрия».

Самым названием «Пангеометрия» Лобачевский хотел подчеркнуть его всеобъемлющий характер, т. е. охватывающий как одну, так и другую гипотезу в теории параллельных линий, — воспроизведение новой геометрии при любом значении параметра, от которого она зависит. Сочинение содержит построение неевклидовой геометрии, может быть более сжатое, чем в «Новых началах». Но даны также выражения элементов длины, площади, объема и некоторые интегральные вычисления, наиболее простые из приведенных в «Воображаемой геометрии».

Однако один момент в «Пангеометрии» играет существенную роль в дополнение к прежним сочинениям Лобачевского. Дело заключается в следующем. В аналитических вычислениях, которыми сопровождается построение неевклидовой геометрии, два раза появляется одно и то же функциональное уравнение

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\,\varphi(y). \tag{41}$$

В первом случае $\varphi(x)$ есть отношение двух предельных дуг, содержащихся между одними и теми же двумя осями и отстоящими одна от другой на расстоянии x; во втором случае этому уравнению удовлетворяет функция $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)$. Как известно, этому уравнению удовлетворяет только показательная функция a^x. При надлежащем выборе единицы длины за основание a может быть принято основание натуральных логарифмов e. Это Лобачевский и делает, выражая функцию, определяемую уравнением (41), через e^x. Но поскольку это уравнение служит для определения двух различных геометрических величин, естественно возникает вопрос, надлежит ли в обоих случаях

[1] «Сборник ученых статей, написанных профессорами императорского Казанского университета, в память пятидесятилетнего его существования». Казань, 1856.

брать за основание одно и то же число a, можно ли считать, что эта функция в том и в другом случае выражается через e^x при том же выборе единицы меры. Лобачевским это не было предусмотрено; и было несомненным дефектом, который ставил ему в вину И. Больай в своих заметках о «Геометрических исследованиях». В «Пангеометрии» Лобачевский это предусмотрел и исправил.

«Пангеометрия» заканчивается соображениями о том, какая геометрия имеет место в природе, осуществляется ли здесь предположение (постулат) Евклида, или нет. Лобачевский повторяет свой основной вывод, имеющий геометрическое, физическое и гносеологическое значения.

«Один опыт только может подтвердить истину этого предположения, например, измерением на самом деле трех углов прямолинейного треугольника, измерение, которое может быть произведено различным образом». Он и указывает два различных способа, которые могут для осуществления этого опыта служить.

«Пангеометрия» изложена менее доступно, нежели «Геометрические исследования». Это краткое, трудное изложение вызывало наиболее справедливые упреки. Вот что об этом говорит в своих воспоминаниях А. Попов: «Между тем как в сочинениях своих он отличался слогом сжатым и не всегда ясным, в аудитории он заботился об изложении со всею ясностью». [1]

Утрата зрения лишила Лобачевского возможности эту последнюю работу написать. Ее писали под его диктовку студент Н. И. Бюрно и профессор И. А. Больцани.

Больцани был тогда еще молодой ученый, которого привлек к научной работе Лобачевский. Это был молодой итальянец, который прибыл в Россию со странствующим итальянским книгопродавцем. Некоторое время этот книготорговец провел в Казани, его лавку охотно посещали научные работники. Однажды А. Ф. Попов при посещении магазина застал Больцани за математической книгой. Присмотревшись, он увидел, что мальчик читает «Механику» Пуассона, сочинение отнюдь не легкое. Как оказалось, он действительно понимал не все, пропускал то, что ему было трудно, но все же читал Пуассона. Попов обратил на него внимание Лобачевского, который им заинтересовался, устроил ему возможность системати-

[1] А. Попов. Воспоминания, стр. 156.

чески учиться. Больцани скоро поступил в университет и окончил его магистром. Он достиг звания профессора и вел преподавание по кафедре физики.

При всем уважении и благодарности, которые Больцани несомненно питал к Лобачевскому, он не был в состоянии усвоить его идей. Написав под его диктовку «Пангеометрию», он все же говорил, что это бред умалишенного.

При том состоянии здоровья, в котором Лобачевский в эту пору находился, он уже, конечно, не мог нести даже консультационных обязанностей по службе. 12 ноября 1855 г. он был уволен от службы по болезни с причислением к министерству народного просвещения.

После того, как Лобачевский написал последнюю свою статью, он прожил недолго. Уже года за два до смерти появились ее предвестники. Как-то Николай Иванович прогуливался по комнате, выходившей в сад. Вдруг домашние в соседней комнате услышали падение. Прибежали, нашли его распростертым на полу; через некоторое время он поднялся, но с тяжелым предчувствием, что дело идет к смерти. Такие припадки стали повторяться все чаще и чаще. 12 (24) февраля 1856 г., ровно через тридцать лет после того, как он сделал в факультете свой первый доклад («Exposition succincte») Лобачевский скончался. На торжественно обставленных похоронах надгробную речь произнес Н. Н. Булич.

«Ни одно событие университета, — сказал он, — ни один сколько нибудь важный факт его истории с самого начала до настоящего времени не могут быть упомянуты без имени Лобачевского. Его благородная жизнь тесно и неразлучно сплеталась с историей Казанского университета; она есть живая летопись университета, его надежд и стремлений, его возрастания и развития».

С тех пор прошло около девяноста лет. И теперь к этому нужно прибавить, что его творческая жизнь тесно и неразлучно сплетена со всей дальнейшей историей геометрии, со всей ее эволюцией; она проникла во все отрасли точного знания, внося в них совершенно новые установки. Это нам остается еще показать.

Надгробный памятник на могиле Лобачевского

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ДО И ПОСЛЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

XXIII. Возрождение идей Лобачевского

(К семидесятилетию со дня его рождения)

Даже в надгробной речи Н. Н. Булич с большой осторожностью говорит о научных работах Лобачевского. Совершенно естественно, что при том отношении, которое встретили в России работы Лобачевского, они после его смерти были вовсе забыты. Однако недолго они оставались в забвении. Гаусс был единственным человеком, который при жизни Лобачевского усвоил и оценил его замечательные идеи, но по существу этих идей он не проронил в печати ни одного слова. Авторитетное суждение из его же уст, можно сказать, прозвучало вскоре после его смерти.

Гаусс умер за год до смерти Лобачевского — в 1855 г. В конце 50-х годов известный германский издатель Петерс начал выпускать в свет переписку Гаусса с его другом Шумахером.[1] В томе V этой переписки было опубликовано письмо Гаусса к Шумахеру от 26 ноября 1840 г. Следующий отрывок из этого письма относится к Н. И. Лобачевскому.

«Недавно я имел случай вновь просмотреть книжку Лобачевского («Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», Berlin, 1840; в издательстве Fincke,

[1] Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. I—VI. Altona, 1860—1865.

размером в 4 печатных листа). Она содержит основы той геометрии, которая должна была бы иметь место и была бы строго последовательной, если бы евклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт[1] назвал такую геометрию *звездной* (Astralgeometrie), Лобачевский называет ее *воображаемой геометрией*. Вы знаете, что я уже 54 года (с 1792 г.) имею то же убеждение (с некоторым позднейшим расширением, на котором не хочу здесь останавливаться); по материалу я таким образом в сочинении Лобачевского не нашел для себя ничего нового; но в его развитии автор следует другому пути, отличному от того, которым я шел сам; оно выполнено Лобачевским с мастерством, в чисто геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, которая наверное доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

За этим следует письмо к астроному В. Струве от 11/XII 1846 г., в котором Гаусс благодарит его за присылку работ Лобачевского; он надеется скоро, усвоив русский язык, прочесть эти сочинения «с особым вниманием».

К каждому слову Гаусса в математическом мире прислушивались с большим вниманием. Его восторженные отзывы о работах Лобачевского естественно заинтересовали математиков. С произведениями Лобачевского познакомились и прежде всего с наиболее доступным из его сочинений «Geometrische Untersuchungen»; теперь его идеи были усвоены, вызвали величайший интерес; «Воображаемая геометрия» Лобачевского была вновь призвана к жизни. Пионерами этого возрождения были Гуэль во Франции, Бальтцер в Германии и Баттальини в Италии.

Гуэль, профессор университета в Бордо, еще раньше интересовался основаниями геометрии. В 1863 г. он опубликовал мемуар «Опыт рационального изложения оснований элементарной геометрии».[2] Это одна из многочисленных попыток реорганизации структуры элементарной геометрии; большого значения она не имеет. Теория параллельных линий изложена в этом мемуаре по обычному

---

[1] Прежде в Марбурге, теперь профессор юриспруденции в Кенигсберге (примечание Гаусса).

[2] J. H o ü e l. Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. Archiv der Mathematik und Physik. XL, 1863.

плану и никаких указаний на неевклидову геометрию еще не содержит. Но после опубликования писем Гаусса Гуэль занялся работами Лобачевского и прежде всего тщательно изучил «Geometrische Untersuchungen». В 1866 г. он перевел это сочинение на французский язык и опубликовал его в «Известиях общества естествоиспытателей г. Бордо», а также в отдельном издании.[1] В предисловии к этому изданию помещено извлечение из письма Гаусса к Шумахеру. В следующем году им выпущена небольшая брошюра «Опыт критики оснований геометрии»,[2] которая представляет переработку его статьи 1863 г.; здесь уже обстоятельно изложены основные идеи нового учения.

Бальтцер, профессор гимназии в Дрездене, написал руководство «Элементы математики» в двух частях, получившее в Германии большое распространение в качестве руководства для среднего образования. В 1867 г. вышло в свет второе издание этого сочинения.[3] Во второй части совершенно изменено изложение главы о параллельных линиях. Здесь изложены работы Лежандра; вкратце выясняется сущность идей Лобачевского и указывается литература. Эта книга, имевшая в Германии большое распространение, очень содействовала возрождению идей Лобачевского.

Наконец, в том же 1867 г. Баттальини, познакомившись с идеями Лобачевского по переводу Гуэля, перевел на итальянский язык «Пангеометрию» и даже дал оригинальный вывод неевклидовой тригонометрии.[4]

Наконец, о Лобачевском заговорили и на родине. В 1868 г. в III томе не так давно еще возникшего в Москве журнала «Математический сборник» появился перевод «Geometrische Untersuchungen» на русский язык, принадлежавший профессору А. Л. Летникову. Переводу предпослана статья, содержавшая первый в России еще осторожный, но все же благоприятный отзыв о трудах

---

[1] N. Lobatchewsky. Études géométriques sur la théorie des parallèles. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles à Bordeau. IV, 1866.

[2] J. Hoüel. Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie. Paris, 1867.

[3] R. Baltzer. Die Elemente der Mathematik. 2-te verbesserte Ausg., Leipzig, 1867.

[4] G. Battaglini. Sulla geometria immagionaria di Lobatschewsky, Giorn. Mat., *5*

Лобачевского. Эта статья настолько характерна, что мы считаем необходимым привести ее целиком.

О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского

Известно, что стремления разных авторов доказать XI аксиому Евклида, или так называемый евклидов постулат, породили целую литературу quasi-математических исследований, имеющих предметом установить теорию параллельных линий на строго геометрических началах. Большая часть размышлений, представленных авторами, оказалась вполне несостоятельной. Другие ученые, прибегая к посторонним соображениям аналитического свойства, решали вопрос совсем не в том виде, в каком желательно было видеть его решение, и таким образом не достигали главной цели усовершенствования начал евклидовой геометрии.

Хотя, с одной стороны, вопрос о параллельных линиях, вследствие своей простоты и доступности, вызывал часто ученические труды, зато, с другой, по своему глубоко философскому интересу он привлекал к себе и первостепенных математиков, как, например, Бертрана (из Женевы), Лежандра и В. Я. Буняковского. Труды первых двух геометров имеют теперь больше историческое значение, так как представленные ими соображения держались некоторое время в учебниках, и еще до сих пор можно встретить преподавателей геометрии, дающих так называемую «бертранову теорему» вместо аксиомы Евклида. Академик Буняковский в одном из своих мемуаров о параллельных линиях [1] представил ряд замечаний, обнаруживающих недостаточность доказательств, данных Бертраном и Лежандром. После того в нескольких мемуарах и в особом замечательном сочинении о параллельных линиях [2] тот же геометр изложил подробно и проследил критически постепенное развитие и современное состояние этой основной теории геометрии. Наконец, в названном выше сочинений и в других статьях г. Буняковский предложил и собственные исследования по этому важному и вместе любопытному вопросу.

В настоящей статье мы хотели бы обратить внимание наших читателей на весьма замечательные, но мало известные труды о том же предмете нашего соотечественника, бывшего профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Этот ученый, математические исследования которого начинают цениться по достоинству в Западной Европе, один из всех геометров, писавших о теории параллельных линий, становится при развитии ее начал на в высшей степени оригинальную точку зрения. Из некоторых мест переписки Гаусса с Шумахером, недавно изданной г. Петерсом, видно, что знаменитый германский геометр еще с 1792 г., в течение слишком пятидесяти лет, возвращался от времени до времени к размышлениям о теории параллельных линий и, что еще замечательнее, Гаусс относился к этому вопросу именно с той самой точки зрения, на которой остановился Лобачевский.

---

[1] Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des paralléles. 1850. Mémoires de l'Académie de Sciences. St. Pétersbourg, VI serie, T. IV.

[2] В. Буняковский. Параллельные линии. СПб., 1853.

Судьба исследований профессора Лобачевского довольно поучительна для нас русских. Его первый опыт «о началах геометрии» появился еще в 1829 году в «Казанском вестнике»; потом в «Ученых записках Казанского университета», в журнале Крелля автор печатал целый ряд мемуаров о том же предмете, которые, повидимому, привлекали мало внимания его соотечественников. Даже теперь, когда труды Н. И. Лобачевского получили санкцию полного одобрения со стороны одного из величайших геометров нашего времени и когда взгляды русского ученого начинают проникать в лучшие немецкие учебники,[1] у нас, вероятно, найдется немного преподавателей геометрии, которые знакомы с сущностью исследований казанского профессора.

В 1840 г. Лобачевский напечатал брошюру под заглавием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Брошюра эта привлекла внимание Гаусса, из писем которого к Шумахеру от 1831 г., приводимых ниже, можно видеть, что великий геометр в то время уже более сорока лет имел истинные основания нового учения, которое он называл неевклидовой геометрией и которое в сущности совпадало с теориею Лобачевского, названною этим ученым «воображаемою геометрией». Когда Гаусс познакомился с трудами Лобачевского, то он поступил относительно его так же, как прежде относительно Абеля и Якоби, которые достигли в теории эллиптических функций результатов, ему уже известных, но им не изданных: он отказался от принадлежности ему нового учения и ограничился тем, что выразил полное одобрение труду Лобачевского, находя только название «воображаемой геометрии» не довольно удачно выбранным.

Исследования Лобачевского о параллельных линиях отличаются от разысканий других ученых прежде всего своею целью. Автор вовсе не имеет в виду доказать a priori XI аксиому Евклида; совершенно напротив, он начинает с допущения возможности встречи перпендикуляра и наклонной[2] или — что одно и то же — предполагает, что через данную точку всегда можно провести бесчисленное множество прямых, лежащих в одной плоскости с данною прямою и ее не встречающих. Таким образом, Лобачевский доказывает, что не существует никакой причины утверждать a priori, что сумма углов прямолинейного треугольника может быть менее двух прямых углов, и даже утверждает, что, кроме астрономических наблюдений, мы не имеем другого средства удостовериться в справедливости вычислений обыкновенной геометрии. Такие смелые и оригинальные мысли, развиваемые строго и последовательно, в чисто геометрическом духе, очевидно имеют право на внимание. Ученый переводчик брошюры Лобачевского г. Houël полагает, что не преувеличивая философского значения этого исследования, можно сказать, что оно бросает совершенно новый свет на основные начала геометрии и открывает новый, еще не разработанный путь розысканиям, которые могут привести к неожиданным открытиям. Во всяком случае труды Лобачевского должны оказать влияние на усовершен-

---

[1] Baltzer R., Die Elemente der Mathematik. Dresden, 2 Aufl., 1867.

[2] Автор, очевидно, выразил мысль Лобачевского неправильно: его допущение ведь заключалось в том, что перпендикуляр и наклонная к секущей могут не встречаться.

ствование методов преподавания и уничтожить несбыточную надежду доказать аксиому Евклида a priori, надежду однородную с тою, которую питают изобретатели вечного движения, квадратуры круга и проч. Мы думаем, что читатели «Математического сборника», и в особенности гг. преподаватели геометрии, прочтут не без интереса предлагаемый здесь перевод брошюры Лобачевского.

Малоизвестность этого труда, печатавшегося по-русски в весьма растянутом виде, со многими посторонними развитиями, в издании, всегда имевшем ограниченный круг читателей, а теперь сделавшемся почти редкостью, оправдывает появление перевода брошюры, в которой автор излагает вкратце сущность своих изысканий, не обративших повидимому, большого внимания нашей ученой публики во время их появления. Притом же брошюра Лобачевского в настоящее время читается на Западе: недавно она переведена на французский и итальянский языки.

Мы помещаем сначала извлечение из любопытной переписки Гаусса с Шумахером о параллельных линиях, которое определяет отношение исследований Гаусса к теории Лобачевского. Вслед за письмами мы печатаем перевод упомянутого выше сочинения нашего ученого геометра.

Итак, перелом совершился. Идеи Лобачевского уже не «нелепые фантазии», как их называл анонимный критик «Сына отечества»; о них уже не повторялись слова Остроградского, что «они вряд ли заслуживают внимания»; это теперь «весьма замечательные, но мало известные труды нашего соотечественника». И все же, вчитываясь в этот новый отзыв, нельзя не видеть той осторожности, с которой высказаны новые суждения о трудах Лобачевского. Прежде всего они сопоставляются с исследованиями В. Я. Буняковского. Нужно сказать, что работы Буняковского по теории параллельных линий были очень слабы; он все еще не потерял надежды доказать постулат; даже доказательство Бертрана не встречает с его стороны категорических возражений; работ Лобачевского он совершенно не знает, хотя писал уже в 1853 г. и позже. Далее Летников предназначает свою статью исключительно для «преподавателей» математики. Кто же из русских ученых математиков того времени был с этими исследованиями знаком? Мог ли А. Л. Летников рассчитывать, что преподаватели математики того времени будут в состоянии усвоить идеи Лобачевского и его геометрическую систему? И та же недооценка, та же мысль, что читателями публикуемого сочинения Лобачевского должны быть не ученые математики, для которых, главным образом, предназначался журнал «Математический сборник», а преподаватели математики, которым

работы Лобачевского уже во всяком случае не могли быть доступны, продолжается и дальше. Конечно, об усовершенствовании преподавания математики на основе этих работ можно было говорить разве только в том смысле, что в учебниках не следует помещать неправильных доказательств постулата о параллельных линиях (в «Руководстве по геометрии» Ф. И. Буссе, имевшем тогда большое распространение в гимназиях, помещалось доказательство типа Бертрана). Наконец, даже подписать статью полным своим именем Летников не решился. Рассматривая все статьи в первых томах «Математического сборника», мы не нашли ни одной, которая не была бы подписана полной фамилией автора.[1]

Новые настроения во взглядах на работы Лобачевского докатились и до Казани. 11 февраля 1867 г. декан физико-математического факультета Казанского университета вошел в совет университета с представлением следующего содержания:

«Сочинения бывшего профессора здешнего университета Н. И. Лобачевского в последнее время обратили на себя внимание европейских ученых, особенно те, которые относятся к области геометрических исследований. Причиною столь позднего знакомства европейских ученых с трудами покойного знаменитого нашего сочлена было то обстоятельство, что большая часть из них была помещена в «Ученых записках», которые, как известно совету, печатались в малом числе экземпляров на удовлетворение потребностей округа и членов университета. У книгопродавцев ни петербургских, ни московских они не находились.

Не известно, каким путем успели проскользнуть за границу некоторые мемуары Лобачевского;[2] но дело в том, что перевод одного из них, сделанный французским геометром Гуэлем, дал право сказать этому последнему: «travaux qui à peine tirés de l'oubli, ont déjà attiré l'attention d'éminents géomètres»;[3] и действительно, кроме

---

[1] Что статья принадлежит именно А. Л. Летникову, не подлежит сомнению; в энциклопедии Брокгауза и Ефрона в статье, посвященной Летникову, она указана в списке его сочинений.

[2] Поразительная неосведомленность: ведь «Geometrische Untersuchungen» были изданы в Германии.

[3] «Труды, едва извлеченные из забвения, уже привлекли внимание выдающихся геометров».

требований из-за границы, полученных некоторыми членами факультета о присылке сочинения Лобачевского, такие же требования получил и библиотекарь университета. Один экземпляр, и то неполный, едва удалось собрать членам факультета.

Физико-математический факультет, принимая во внимание то, что сочинения Лобачевского составляют библиографическую редкость и что они по своему значению и важности должны быть в России, если не более, то по крайней мере не менее известны, чем за границей, имеет честь ходатайствовать перед советом о новом издании, преимущественно же об издании всех мемуаров, касающихся теории параллельных линий.

Рассчитывая приблизительно около 50 печатных листов, на издание потребуется до 600 рублей».

Так, свыше 70 лет тому назад, возник вопрос об издании собрания сочинений Лобачевского. Совет постановил выпустить в свет полное собрание геометрических сочинений Лобачевского. Но хотя слава Лобачевского росла с каждым годом, хотя его работы приобретали все большее признание и значение, прошло почти двадцать лет, пока это постановление было осуществлено.

Итак, через 10—12 лет после смерти Лобачевского, к семидесятилетию со дня его рождения, его имя уже пользовалось известностью в математическом мире, уже было сделано постановление об издании полного собрания его геометрических сочинений. Жестока была судьба, не давшая великому геометру прожить еще несколько лет, чтобы дождаться первого признания его замечательных идей.

XXIV. Предистория неевклидовой геометрии

Приведенное письмо Гаусса имело и другое значение. Из него было видно, что Гаусс уже давно, с 1792 г., в некоторой мере владел теми идеями, которые в углубленном развитии были опубликованы Лобачевским; из того же письма видно, что к этим идеям приходили и другие геометры, в частности Швейкарт, который назвал неевклидову геометрию «звездной». Еще более подробные сведения об этом оказались в письмах к Шумахеру от 1831 г., а по опубликовании переписки Гаусса с другими друзьями, Ольберсом, Бесселем и В. Больай, стало

ясно, что неевклидова геометрия, впервые опубликованная Лобачевским, имела свою предисторию, носившую своеобразный, эпизодический характер. Отдельные эпизоды этой истории частью были ранее скрыты от математического мира и выплыли только в этой переписке, частью получили некоторое выражение в брошюрах, которые в свое время совершенно ускользнули от внимания математиков. Эта история несомненно имеет большой интерес; она послужила предметом обстоятельного исследования и теперь полностью выяснена, главным образом благодаря трудам двух германских ученых — Ф. Энгеля и П. Штекеля. Относящиеся сюда материалы опубликованы ими в очень интересной книге — «Собрание первоисточников по предистории неевклидовой геометрии».[1] Кроме того, Штекель выпустил специальную книгу о геометрических работах Гаусса;[2] все материалы, относящиеся к Гауссу, опубликованы также в VIII томе полного собрания сочинений Гаусса.[3] Мы не можем не уделить здесь места краткому изложению этой предистории неевклидовой геометрии.

В приведенном выше письме Гаусса к Шумахеру (от 28 ноября 1846 г.) он утверждает, что еще в 1792 г. пришел к тем взглядам, которые опубликованы в брошюре Лобачевского. Как далеко он в ту пору продвинулся по этому новому пути, сказать очень трудно, но в письме от 16 декабря 1799 г. к своему другу В. Больай, приславшему на его усмотрение опыт доказательства постулата о параллельных линиях, Гаусс дает уже очень отчетливый очерк этих своеобразных идей. В этом его изложении нет еще речи о новой геометрии, но два обстоятельства выражены совершенно отчетливо. Во-первых ясно, что Гаусс довольно далеко провел выводы, которые можно получить, отвергая постулат о параллельных линиях с целью его доказательства от противного; во-вторых, он пришел к сознанию, что эти выводы, быть может, вовсе не так несообразны, как это на первый взгляд кажется.

---

[1] P. Stäckel und F. Engel. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss. Eine Urkundenzammlung zur Vorgeschichte der nicht euklidischen Geometrie. Leipzig, 1895.

[2] P. Stäckel. Gauss als Geometer. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mat. Phys. Klasse. 1917 (и отдельное издание).

[3] C. F. Gauss. Werke, VIII, стр. 157—268.

И все же это были еще, так сказать, блуждания мысли, не вылившейся в определенные взгляды; твердо на этой точке зрения Гаусс еще не стоял; ближайшие годы принесли сомнения и колебания, которые отчетливо выражены в письме к тому же В. Больай от 25 ноября 1804 г. Из этого письма совершенно ясно, что в конце 1804 г. Гаусс не считал еще попытку доказать постулат о параллельных линиях совершенно безнадежной. В продолжение почти 16 лет те же сомнения проскальзывают также в письмах и заметках, относящихся к 1806, 1808 и, наконец, к 1812 гг. В 1818 г. Хр. Герлинг, бывший ученик и друг Гаусса, получил поручение переработать учебник математики Лоренца (см. стр. 89). Герлинг встречает препятствия в изложении учения о параллельных линиях. Так как он уже раньше имел об этом переписку с Гауссом, то теперь обращается к нему за советом по этому вопросу; он пишет Гауссу следующее (2 июля 1818 г.):

«Я считаю правильным, что излагать это, т. е. учение о параллельных линиях, нужно по методу Евклида, однако указывая его недостаточность. Но как это сделать, мне не ясно. Я считаю, что было бы лучше всего привести в качестве аксиомы предложение: «через точку прямой можно провести к ней только одну параллельную ей прямую линию»;[1] в примечании же нужно указать, что доказательство этого предложения до сих пор найти не удалось; поэтому необходимо принять это предложение за аксиому, пока кто-либо не найдет его доказательства *или не обнаружится его неправильность*». Герлинг, таким образом, уже не исключал возможности, что постулат о параллельных может оказаться несправедливым; это несомненно было навеяно предыдущими беседами с Гауссом. В ответном письме (от 25 сентября 1818 г.) Гаусс по этому поводу замечает:

«Я очень рад, что Вы имеете мужество высказаться так, как будто Вы признаете возможным, что наша теория параллельных линий, а следовательно, и вся наша геометрия ложны. Но осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой».

Во всяком случае в письме от 8 ноября 1824 г. к молодому правоведу и математику Ф. Тауринусу, о котором еще будет речь, изложены основы геометрии, к которой

[1] Так называемая Плэйферова формулировка постулата.

приводит отрицание постулата Евклида, с определенностью, не оставляющей сомнения в том, что Гаусс в ту пору уже владел основными идеями геометрической системы, которую он назвал «неевклидовой геометрией». Приводим выдержку из этого письма.

«Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя (für mich selbst) совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придаем этой постоянной, тем ближе мы подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны. Все мои старания найти в этой неевклидовой геометрии противоречие или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже ничего не знаем о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неевклидова геометрия была истинной и упомянутая выше постоянная находилась бы в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить a posteriori. Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы евклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины».

Читатель, который уже знаком с работами Лобачевского, видит, что это первые шаги в том построении, которое выполнено Лобачевским, начальные его предложения.

Письмо к Тауринусу, которое мы цитировали, заканчивается следующими словами:

«Относительно человека, который обнаружил глубокий математический ум, я не опасаюсь, что он дурно поймет изложенное выше; но во всяком случае вы должны смотреть на это, как на частное сообщение, которое отнюдь не должно быть опубликовано».

Эти строки очень характерны: Гаусс не только не публикует ничего о своих воззрениях на основы геометрии, но требует от всех тех, кого он посвящает в свои сокровенные мысли по этому вопросу, сохранять их в самой строгой тайне. Каковы были причины этой сдержанности? Штекель полагает, что причины эти были различны. Гаусс вообще склонен был публиковать результаты своих исследований только после того, как они получили тщательную и весьма совершенную обработку. Но главную роль, несомненно, играли опасения, что эти странные и своеобразные идеи будут встречены враждебно. В январе 1829 г., т. е. тогда, когда Лобачевский уже публиковал мемуар «О началах геометрии» с его развернутыми исследованиями, Гаусс писал Бесселю:

«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».

Крика беотийцев Гаусс действительно избежал, потому что об этих своих воззрениях он ничего при жизни не опубликовал. В его наследии сохранились лишь отдельные фрагменты — наброски начальных предложений неевклидовой геометрии. Эти фрагменты воспроизведены в томе VIII сочинений Гаусса; достаточно их посмотреть, чтобы уяснить себе, как незначительно то, что оставил Гаусс, по сравнению с творениями Лобачевского.

Эта переписка с Тауринусом имела свою предисторию. С 1812 по 1816 г. в Харькове состоял профессором права Фердинанд Швейкарт (1780—1857). Посвящая свой досуг геометрии, Швейкарт еще раньше заинтересовался

теорией параллельных линий и в 1807 г. опубликовал работу, содержавшую доказательство V постулата.[1] Убедившись потом в неправильности этого доказательства, Швейкарт во время своего пребывания в Харькове пришел к воззрениям, которые можно рассматривать как первое предвосхищение идей Лобачевского. В 1817 г. Швейкарт был приглашен в Марбург, где сблизился с профессором Герлингом и через него препроводил Гауссу заметку следующего содержания.

«Существует двоякая геометрия: геометрия в узком смысле слова, евклидова, и звездная (astralische). Треугольники последней геометрии имеют ту особенность, что сумма трех углов не равна двум прямым. Принимая это, можно самым точным образом доказать следующее:

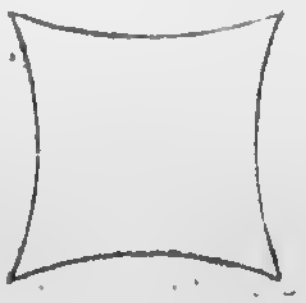


Рис. 35.

а) что сумма трех углов в треугольнике меньше двух прямых; b) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника; c) что высота прямоугольного равнобедренного треугольника, постоянно возрастая с возрастанием сторон, не может превзойти некоторую линию, которую я называю константой, Квадраты имеют поэтому следующий вид (рис. 35).

Если же константа для нас равна радиусу Земли (в каковом случае всякая линия, проведенная в пространстве от одной неподвижной звезды к другой, отстоящей от нее на 90°, была бы касательной к земному шару,[2] то она бесконечно велика по сравнению с протяжениями, которые мы встречаем в повседневной жизни. Евклидова геометрия имеет место только в том случае, если константа бесконечно велика. Только в этом случае сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, и это легко доказать, если принять, что константа бесконечно велика».

Для осведомленного человека совершенно ясно, что в этих словах содержатся первые зачатки геометрии Лобачевского. Прежде всего поясним основное соображение,

---

[1] K. Schweikart. Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig und Jena, 1807.

[2] Если S_1 и S_2 суть две звезды, отстоящие одна от другой на 90°, O— центр Земли, то S_1OS_2 есть треугольник Швейкарта.

Если высота этого треугольника (константа) равна радиусу Земли то прямая $S_1 S_2$ касается поверхности Земли в средней точке A.

высказанное Швейкартом. Представим себе равнобедренный треугольник ACB с прямым углом при вершине C (рис. 36). Биссектриса CD служит его высотой. Будем теперь высоту CD увеличивать: будем сначала получать равнобедренные треугольники $A'CB'$, $A''CB''$, ...с возрастающими боковыми сторонами. Однако в плоскости Лобачевского, когда высота достигнет значения $h(AD_1)$, для которого $\Pi(h) = 45°$, перпендикуляр к AD уже перестанет пересекать прямые CA и CB, равнобедренного треуголь-

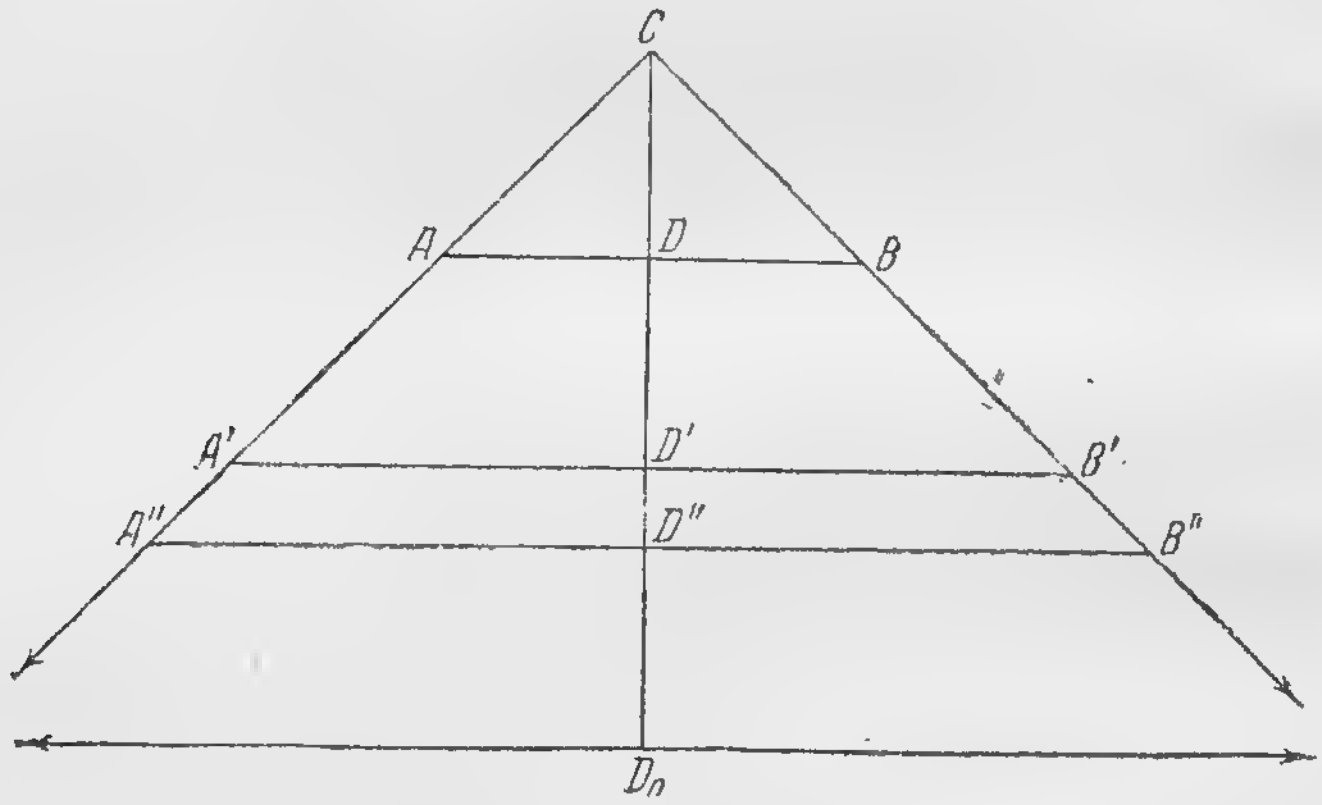


Рис. 36.

ника уже не получится. Швейкарт это именно и предусматривает в пункте (*c*) своего сообщения; h — это та постоянная, о которой он говорит, — постоянная, которая в той или иной форме выплывает в неевклидовой геометрии.

Гаусс ответил: «Заметка профессора Швейкарта доставила мне необычайно много удовольствия, и я прошу сказать ему по этому поводу от меня много хорошего. Все это как будто выписано из моей собственной души». Гаусс тут же приводит даже некоторые начальные предложения неевклидовой геометрии. Это письмо характерно больше для Гаусса, чем для Швейкарта. Из него видно, что в начале 1819 г. Гаусс уже владел первыми началами неевклидовой геометрии. Швейкарт, повидимому, недостаточно владел математикой, чтобы продвинуться в развитии новой геометрии значительно дальше того, что изложено в его записке к Гауссу.

В переписке со своим племянником Тауринусом, в то время также изучавшим юридические науки, Швейкарт сообщил последнему о своих занятиях теорией параллельных линий и в общих чертах познакомил его с теми результатами, к которым он пришел. Тауринус отнесся к этому сначала безучастно, но через несколько лет, случайно познакомившись с упомянутой выше брошюрой Швейкарта, он с увлечением занялся теорией параллельных линий. Имея в виду доказать постулат от противного, он исходит из допущения, что сумма углов треугольника меньше $2d$, и делает отсюда ряд выводов. Зная от Швейкарта, что вопросы этого рода интересуют Гаусса, он послал ему заметку, содержавшую первые результаты его исследований. В чем собственно его результаты в ту пору заключались, осталось неизвестным, так как письмо Тауринуса не сохранилось. Ответное письмо Гаусса помещено выше почти полностью. Как и все письма Гаусса, оно говорит больше о его собственных достижениях, чем о результатах, полученных его корреспондентом. Во всяком случае благожелательный тон Гаусса побудил Тауринуса продолжать свои занятия теорией параллельных линий, в результате чего он в 1825 г. опубликовал брошюру, посвященную этому вопросу.[1]

В следующем 1826 г. он опубликовал новую брошюру, содержавшую тот же материал в исправленном и дополненном виде.[2] Извлечения из обеих брошюр помещены в «Собрании первоисточников» Штекеля и Энгеля. Стремясь, как указано выше, доказать постулат о параллельных от противного, Тауринус также пришел к константе Гаусса и Швейкарта и близко подошел к тригонометрии неевклидова пространства; фактически он решает ряд задач, относящихся к неевклидовой геометрии. Методы вычисления тяжеловесны, изложение сжато и мало вразумительно; это в значительной мере обусловливалось тем, что Тауринус сам не отдавал себе ясного отчета о содержании и значении проблем, решением которых он занимался.

В предисловии к своей последней брошюре Тауринус в осторожной форме высказывает пожелание, чтобы Гаусс опубликовал свои взгляды на основы геометрии. Брошю-

---

[1] F. A. Taurinus. Theorie der Parallellinien. Köln, 1825.
[2] F. A. Taurinus. Geometriae prima elementa. Köln, 1826.

ры были, конечно, посланы Гауссу, но последний усмотрел в словах Тауринуса, помещенных в предисловии, нарушение его воли и прекратил с ним какие бы то ни было сношения. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Тауринус впал в меланхолию; в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюр. В Европе сохранилось лишь несколько экземпляров этих брошюр. Профессор Энгель их разыскал и опубликовал те материалы, которые представляют интерес, в своем «Собрании первоисточников».

Во время своего учения в Гёттингене Гаусс сблизился с прибывшим из Венгрии студентом Вольфгангом (Фаркасом) Больай (Wolfgang Bolyai, 1775—1856) — нам уже приходилось о нем упоминать. В студенческие годы друзья вели многочисленные беседы по разным вопросам математики, главным образом по ее основаниям. В 1799 г. В. Больай окончил университет и вернулся на родину. В 1804 г. он был назначен профессором математики в коллегии в г. Марос-Васаргели и занимал этот пост почти 50 лет. Это был очень живой, несомненно одаренный человек, с весьма разнообразными интересами. Он старался способствовать развитию мадьярского языка, увлекался поэзией, музыкой, сельским хозяйством. Но более всего его интересы принадлежали математике. После возвращения из Германии В. Больай вел интенсивную переписку с Гауссом, которая, однако, с годами замирала; тем не менее время от времени Вольфганг обращался к Гауссу с различными вопросами, относящимися к основаниям математики. Два раза Вольфганг посылал Гауссу доказательства постулата о параллельных, из которых первое относилось еще к 1799 г.; это было, таким образом, очень скоро после того, как они расстались в Геттингене. Ответ Гаусса на это первое обращение мы уже привели выше; он содержал указания на новые воззрения Гаусса относительно евклидовой геометрии.

В 1832—1833 гг. Вольфганг Больай выпустил в свет учебное руководство по основам математики, как элементарной, так и высшей, под названием «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики».[1] Первое слово этого заглавия — «Опыт» (по-латыни «Tentamen»)

[1] Tentamen inventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris... introducendi Maros-Vàsàrhelini, I—II, 1832—1833.

служит кратким названием, под которым это сочинение известно в литературе. К первому тому, появившемуся в 1832 г., было присоединено приложение, принадлежавшее сыну Вольфганга — Иоанну.

Иоанн родился в 1802 г.; детство и юность он провел в доме отца, обучался под его непосредственным руководством в той же коллегии, где отец был профессором. Юноша несомненно обнаруживал большие способности, особенно по математике. Мечтой отца было послать Иоанна для продолжения образования в Гёттинген к Гауссу. Однако для осуществления этого намерения были необходимы значительные средства, которыми Вольфганг не располагал. Он обратился поэтому к Гауссу с письмом, в котором просил его взять Иоанна к себе, с тем что он покроет расходы по его содержанию. На это письмо ответа не последовало; Гаусс не счел даже нужным объяснить, почему он отклоняет просьбу. Отец и сын очень тяжело это пережили; но выхода не было, и отец определил Иоанна в инженерную академию в Вене, где он обучался на казённый счет. Здесь очень скоро обнаружились выдающиеся математические способности Иоанна, но в то же время его задорный и неуживчивый нрав. В 1823 г. он был произведен в офицеры и послан в небольшой венгерский город Темешвар, а позже переводился в другие гарнизоны. Годы своей службы, продолжавшейся до 1833 г., Иоанн прожил в глубоком уединении. Со своими сослуживцами он не ладил; был случай, когда он в один день выдержал двенадцать дуэлей на рапирах.

В отставку он тоже должен был выйти вследствие конфликта с таможенными чиновниками. Во все эти годы его интересы принадлежали математике. Не имея никакого руководства, совершенно не будучи осведомлен о проблемах, которые в то время занимали выдающихся математиков, Иоанн размышлял главным образом над вопросами элементарной математики, которые являлись камнем преткновения того времени — прежде всего над теорией параллельных линий. Стимулом к этому послужили давнишние беседы с отцом.

Весной 1820 г. Иоанн пишет отцу о своей попытке доказать XI аксиому. Это извещение приводит отца в отчаяние. В ответном письме, которое мы выше (стр. 127) по другому поводу уже привели, он настойчиво убеждает сына оставить безнадежные попытки доказать посту-

лат о параллельных линиях. Увещания отца, однако, не были в состоянии отвлечь Иоанна от занятий теорией параллельных линий. По его собственным словам, он считался больше со словами Сенеки: «suspice viros, etsi deciderint, magna conantes» (почитай людей, много дерзающих, даже если они терпят крушение). Иоанн дерзал, и в результате к 1825 г. он по существу уже владел началами новой, неевклидовой геометрии. Но для того чтобы довести исследование до конца, оформить, изложить полученные результаты, потребовалось еще десять лет. Посвященное этому небольшое сочинение было готово к тому времени, когда отец выпускал в свет свой «Тентамен». Было решено, что работа Иоанна появится в виде приложения к «Тентамену». Как и «Тентамен», работа была написана на латинском языке. «Приложение» — по-латыни «Appendix»; поэтому сочинение Иоанна известно в литературе под названием «Аппендикс». Оно содержало весьма сжатое изложение основ неевклидовой геометрии. «Тентамен» вышел в свет в 1832 г. Отец не был в состоянии овладеть идеями сына, и между ними возник на этой почве очень острый спор. Для разрешения спора Иоанн предложил послать работу Гауссу, суд которого уяснит значение его работы. После пятнадцатилетнего перерыва Вольфганг написал Гауссу, послал ему работу сына и просил сообщить свое мнение о ней. Получив «Аппендикс», Гаусс на следующий же день написал Герлингу:

«На-днях я получил из Венгрии небольшое сочинение по неевклидовой геометрии; я нашел в нем все свои собственные идеи и результаты, выведенные с большим изяществом». Этот лейтмотив, что это собственно его идеи, которым он за недосугом не успел дать достаточного развития, проходит через все письма Гаусса по вопросам, связанным с открытием неевклидовой геометрии. Особенно четко он звучит в ответе Вольфгангу Больай, который последовал только через месяц после получения письма и «Аппендикса». После сообщений дружеского и семейного свойства Гаусс переходит к работе Иоанна и пишет:

«Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я эту работу не должен хвалить, то ты, конечно, на минуту поразишься: но иначе не могу; хвалить ее значило бы хвалить самого себя: все содержание сочинения, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собствен-

ными достижениями, которые частично имеют уже давность в 35 лет. Я, действительно, этим в высшей степени поражен. Моим намерением было о моей собственной работе, которая, впрочем, до настоящего времени очень мало нанесена на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей не имеет правильных воззрений на те вопросы, о которых здесь идет речь; я нашел лишь мало людей, которые с особым интересом отнеслись к тому, что я им сообщал по этому предмету. Чтобы быть в состоянии это усвоить, нужно прежде всего весьма живо прочувствовать то, чего здесь собственно нехватает; а это большинству людей совершенно не ясно. Однако я имел намерение со временем изложить все это на бумаге в такой форме, чтобы эти идеи по крайней мере не погибли со мной. Таким образом, я чрезвычайно поражен тем, что эта работа с меня снимается, и я в высшей степени рад, что именно сын моего старого друга меня предупредил таким замечательным образом».

Это письмо произвело на Иоанна удручающее впечатление. Сначала он не хотел верить, что Гаусс раньше его пришел к этим идеям; он считал, что Гаусс склонен вырвать у него приоритет этого открытия. «Вырвать» — может быть, сказано слишком сильно. Но в письмах Гаусса всегда звучит мысль, что идеи эти принадлежат собственно ему; что только его недосуг лишает его возможности этот материал обработать. Вообще в его отношении к корреспондентам нет и следа заботы о молодых авторах, жаждущих его поддержки. Иоанна особенно волновало, что Гаусс не нашел нужным обмолвиться в печати об этих замечательных идеях. В заметках, оставшихся после его смерти, находятся следующие строки, полные глубокой горечи и совершенно справедливой обиды.

«По моему мнению и, как я убежден, по мнению всякого непредубежденного человека, все доводы, приводимые Гауссом в объяснение того, почему он при жизни совершенно не желает ничего опубликовать из своих собственных работ, относящихся к этому вопросу, совершенно бессильны и ничтожны. Ведь в науке, как и в повседневной жизни, задача заключается именно в том, чтобы необходимые, общеполезные вещи, в особенности еще не вполне ясные, достаточно осветить и всемерно будить еще недостаточное или даже дремлющее сознание истины и права; это именно нужно крепить и развертывать. Пони-

мание математики, к общему вреду и неблагополучию, присуще, к сожалению, лишь очень немногим; и ведь по такому основанию и под таким предлогом Гаусс мог бы последовательно сохранить про себя еще значительную часть своих превосходных работ. То обстоятельство, что, к сожалению, среди математиков, и даже среди знаменитых, имеется еще много поверхностных людей, конечно, не может служить основанием для того, чтобы и в дальнейшем давать только поверхностное и посредственное и оставлять науку в летаргии, в унаследованном ее состоянии. Такого рода умонастроение нужно было бы назвать противоестественным и совершенно бессмысленным. Производит крайне неприятное впечатление, что Гаусс, вместо того чтобы высказать относительно «Аппендикса» и всего «Тентамена» от себя прямое, честное признание их высокой ценности, чтобы дать выражение своей радости и своему участию, чтобы подумать о тех средствах, которые проложили бы хорошему делу широкий путь, — что Гаусс вместо всего этого старается избегать прямого пути и спешит излиться в благочестивых пожеланиях, в выражениях сожаления по поводу недостаточного образования людей. Не в этом, конечно, заключается жизнь и действенная заслуга».

Очень характерно, что эти полупритязания Гаусса на приоритет проявились не только в вопросе об открытии неевклидовой геометрии. Они сказались и в вопросе о создании теории эллиптических функций, которое происходило почти в то же время, когда впервые строилась неевклидова геометрия. Творцами этой теории, как известно, были Абель и Якоби. В 1827—1828 гг. Абель прислал Креллю свою работу, содержавшую учение о приведении эллиптических интегралов к каноническому виду, об обращении интегралов 1-го рода и о двойной периодичности эллиптических функций. Крелль препроводил эту работу Гауссу. В ответном письме Гаусс сообщал, что он уже около 30 лет владеет этими идеями.

«Другие занятия, — писал он, — помешали мне обработать эти исследования. Абель предвосхитил почти треть моих результатов. Он пошел по пути, которому я следовал уже с 1798 г.[1] Я не удивляюсь поэтому, что он достиг

[1] Oeuvres complètes de N. H. Abel. Kristiania, 1839. Вступительная глава Голмбоэ (B. Holmboe).

большей части тех же результатов. Так как, однако, в своей дедукции он проявил столько таланта и изящества, то я освобожден от необходимости обрабатывать собственные результаты».

Тот же лейтмотив, в котором автор до некоторой степени отходит на задний план. А вот отзыв о той же работе Якоби, который в то время также с успехом занимался теорией эллиптических функций: «Работа Абеля выше моих похвал, как она выше моих работ». Отзыв Гаусса вызвал во Франции большое раздражение.

Поскольку речь зашла об отношениях между Гауссом и Абелем, здесь будет уместно сказать несколько слов и о другом инциденте, осложнившем эти отношения и характерном для поведения Гаусса в делах, которые очень волновали молодых ученых; это будет тем более уместно, что проливает некоторый свет и на те переживания, которые выпали на долю Лобачевского.

Приблизительно в то же время, когда размышления о теории параллельных линий привели Лобачевского к открытию неевклидовой геометрии, Абель был поглощен другой проблемой, которая также веками служила камнем преткновения математической мысли: это был вопрос о решении в радикалах общего уравнения пятой степени. В 1824 г. Абель пришел к заключению, что такое решение для уравнений, степень которых выше четырех, невозможно. Он изложил это в мемуаре, озаглавленном «Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré». Этот замечательный мемуар также содержал совершенно неожиданный результат, который составил эпоху не только в истории алгебры, но даже за пределами этой дисциплины. Мемуар был через Шумахера послан Гауссу, после смерти которого был обнаружен в его литературном наследии. Однако Гаусс не одобрил этой работы, во всяком случае ни в какой форме не дал этому выражения. Напротив, есть указание (Hansteen), что Гаусс, не будучи убежден в правильности рассуждений Абеля, был склонен сам заняться этим вопросом.

«Так или иначе, — замечает биограф Абеля, Биеркнесс, [1] — молодой студент, который в наивном напряжении надеялся услышать поддержку со стороны великого че-

[1] C. A. Bjerkness. N. H. Abel. Berlin, 1930.

ловека, в лучшем случае не услышал ничего. Это послужило для Абеля основанием для раздражения против Гаусса». Крелль, которому мемуар был также послан, в нем тоже не разобрался, и мемуар был опубликован только значительно позже. В 1826 г., находясь в Берлине в научной командировке, Абель писал своему учителю и другу Гольмбоэ (Holmboe): «До конца февраля или марта я, повидимому, останусь в Берлине, а затем через Лейпциг и Галле поеду в Гёттинген, — не ради Гаусса, который, говорят, невыносимо горд, а ради библиотеки». Тот же мотив повторяется и в других письмах Абеля. Суров был Гаусс по отношению к молодым ученым.

Возвратимся, однако, к Больай. Исследованию жизни, работ и литературного наследия обоих Больай посвятил много лет своей жизни германский математик П. Штекель, выпустивший большое сочинение, посвященное отцу и сыну Больай. Оно включено в «Собрание первоисточников», которое мы уже не раз цитировали, и состоит из двух частей: первая часть посвящена жизнеописанию и обзору сочинений обоих Больай, второе содержит извлечения из их работ,[1] в том числе «Аппендикс» в переводе на немецкий язык. Это издание содержит весьма обильный математический и литературный материал и представляет очень ценный вклад в историю неевклидовой геометрии. Отсылая к этому сочинению читателей, желающих ближе познакомиться с материалом, мы вкратце остановимся на тех моментах последующей жизни Иоганна Больай, которые связали его с творчеством Лобачевского.

Главный труд его жизни — «Аппендикс» — оставался совершенно не известным. Отчасти это обусловливалось тем, что его работа была помещена в качестве приложения к большому, дорого стоившему «Тентамену», который не получил значительного распространения. Но главная причина этого заключалась в том, что «Аппендикс» был напечатан на латинском языке, был изложен чрезвычайно сжато и схематично, — он не был доступен.

Как мы знаем, Лобачевский после опубликования первых своих работ составил большое сочинение «Новые начала геометрии», в которых старался перестроить всю геометрию с начала до конца на новых основаниях. Больай

---

[1] P. Stäckel. Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Leipzig und Berlin, 1913.

также предпринял совершенно аналогичную работу. Он решил составить обстоятельное сочинение — «Учение о пространстве» («Raumlehre»), имевшее ту же задачу — построить всю геометрию на новых основаниях. Выдержки из сохранившихся рукописей этого сочинения помещены в книге Штекеля. Эта работа была прервана тем, что Иоанн принял участие в соискании премии Лейпцигского ученого общества имени Яблоновского. Тема, предложенная Обществом, требовала улучшения в геометрическом построении теории мнимых чисел. Иоанн представил Обществу краткую работу, несомненно очень интересную по своему содержанию. Быть может, именно геометрическая сторона была недостаточно выдержана, но по существу она представляла собою предвосхищение идей Грасмана и Гамильтона. Однако своеобразная манера Иоанна — крайняя сжатость изложения и схематическое построение — привели к тому, что работа не была понята. В премии ему было отказано, как и отцу, который также участвовал в конкурсе. Новое разочарование усложнилось еще тем, что на этой почве у него возникли распри с отцом, продолжавшиеся до самой смерти Вольфганга.

Но к концу жизни Иоанна постиг новый удар, который он очень тяжело пережил: 17 октября 1841 г. Иоанн получил от отца небольшую брошюру на немецком языке, принадлежавшую Н. И. Лобачевскому и носившую название: «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien».

Это сочинение, как мы знаем, вышло в свет в 1840 г, Но во вступлении Лобачевский указывал, что содержавшиеся в этом сочинении идеи были уже изложены ранее в ряде работ на русском языке, первая из которых появилась в свет в «Казанском вестнике» в 1829 г., следовательно, за три года до опубликования «Аппендикса». Сочинение содержало своеобразное изложение той самой геометрической системы, которую Иоанн разработал в лучшие годы своей жизни. Приоритет опубликования неевклидовой геометрии явно принадлежал Лобачевскому.

Мысли и соображения, которые это сочинение вызвали у Иоанна, сохранились в его обстоятельных примечаниях к «Геометрическим исследованиям». Эти замечания опубликованы Штекелем, который расшифровал рукописи Больай в сотрудничестве с его соотечественником про-

фессором Кюршаком.[1] Иоанн тщательно изучил сочинение Лобачевского и проанализировал каждую его строчку, даже каждое его слово с той же тщательностью, с какой он обрабатывал свой «Аппендикс». Сочинение Лобачевского вызвало целую бурю в его душе. В своих подробных замечаниях он дает этим переживаниям свободное выражение. В отличие от всех остальных работ Иоанна, эти заметки были составлены на венгерском языке, вероятно потому, что Иоанн, как он сам об этом упоминает, не предназначал их для печати. Мало того, они написаны особым латинизированным алфавитом, который составили отец и сын с широким замыслом создать интернациональный язык.

Замечания к «Геометрическим исследованиям», как уже сказано, представляют собою не только критический анализ этого сочинения. Это — изложение мыслей и переживаний Иоанна, вызванных изучением этого сочинения. Они содержат сетования Иоанна на то, что он обойден, его подозрения, что никакого Лобачевского в действительности не существует и что все это злобные козни Гаусса; это — трагический вопль души геометра, сознававшего значение своего творения и не получившего поддержки того единственного человека, который был в состоянии его заслуги оценить. Заметки содержат попутные соображения о том, как было бы лучше всего излагать те или иные части неевклидовой геометрии. Но основное их содержание все же составляют обширные критические замечания, написанные в чрезвычайно придирчивом тоне. Однако при всем душевном возбуждении, в котором Иоанн писал свои замечания, он сохраняет достаточно объективности, чтобы очень высоко оценить творение своего соперника. В примечаниях к предложению 35 он говорит, что вывод сферической тригонометрии, принадлежащий Лобачевскому, несет на себе печать гения, что его работу нужно признать мастерским произведением. Каких-либо действительно слабых мест в работе Лобачевского Иоанн не обнаружил. Наиболее серьезны замечания Иоанна к предложению 36. Нужно сказать, что здесь действительно имеется существенная недоговорен-

[1] P. Stäckel und J. Kürschák. Johann Bolyais Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, 18, Budapest, 1902.

ность, о которой мы уже упоминали (гл. XIII). Она заключается в том, что Лобачевский, дважды употребляя букву e для обозначения оснований показательных функций, к которым его приводят исследования, не доказывает, что эти основания в обоих случах имеют одно и то же значение (см. стр. 246). Если оставаться только при тексте «Геометрических исследований», то это — несомненный пробел. Однако этот пробел совершенно восполнен в других сочинениях Лобачевского, и в сущности даже до появления «Геометрических исследований», что Штекель и обнаруживает надлежащими сопоставлениями.

Большой интерес представляют принципиальные соображения Больай по вопросу о том, насколько можно считать установленным, что неевклидова геометрия не содержит в себе внутренних противоречий. Этот чрезвычайно трудный вопрос занимал Лобачевского в течение всей его жизни; его обширные интегральные вычисления, как мы видели, имеют главной своей целью обнаружить постоянное совпадение результатов и тем подтвердить незыблемость новой геометрии. Относящиеся сюда краткие соображения, которые мы находим в «Геометрических исследованиях», Иоанна не удовлетворяют, и, конечно, не без оснований. Иоанн утверждает при этом, что им найдено безукоризненное доказательство, как теперь говорят, «непротиворечивости» неевклидовой геометрии. Однако никаких следов такого доказательства он не оставил; совершенно не видно, как он к этой задаче подходил. Вряд ли может быть сомнение в том, что это была иллюзия.

Решение вопроса о логической правильности геометрической системы требовало глубоких новых идей, которыми творцы неевклидовой геометрии еще не владели. Они создали для этого главные математические средства, но довести задачу до конца было уже уделом их последователей.

Сведения, принесенные перепиской Гаусса с друзьями, послужили для некоторых германских математиков основанием утверждать, что открытие неевклидовой геомстрии по существу принадлежит Гауссу, что другие авторы, которым приписывается открытие неевклидовой геометрии, фактически заимствовали свои идеи у Гаусса. Эту точку зрения отстаивал покойный Ф. Клейн. В первом литографированном издании своей «Неевклидовой геометрии» он говорил:

«Не подлежит никакому сомнению, что именно он (Гаусс) своим влиянием вызвал исследования Лобачевского и Больай, ибо новые идеи возникли в умах этих людей не самостоятельно (sua sponte), а вследствие личных, хотя и частично косвенных связей с Гауссом». Это утверждение мотивировалось обыкновенно следующими соображениями. Гаусс пришел к своим взглядам на теорию параллельных линий и возможность новой геометрии еще до поступления в Гёттингенский университет. В Гёттингене он, вероятно, имел об этом беседы с Вольфгангом Больай и сообщил ему свои идеи. От Вольфганга эти идеи перешли к Иоанну, который дал им развитие.

Что касается Лобачевского, то здесь, по мнению тех, которые поддерживают эту версию, посредствующую роль мог играть Бартельс. Возможно, что Бартельс был осведомлен относительно взглядов Гаусса на основания геометрии, и от него Лобачевский мог получить толчок к этим идеям. Однако тщательный анализ обнаруживает полную несостоятельность всей этой версии.

Прежде всего, Вольфганг Больай, как мы уже знаем, получив от сына «Аппендикс», не только не усвоил его идей, но категорически их оспаривал; между тем, при том благоговении, с каким Вольфганг относился к Гауссу, он ни в каком случае не мог бы занять такой позиции, если бы в его памяти сохранилось какое-нибудь воспоминание о взглядах Гаусса. Эти общие соображения безусловно подтвердились при тщательном анализе эволюции взглядов Иоанна, произведенном Штекелем.

По отношению к Лобачевскому такой же анализ проведен Ф. Энгелем в его сочинении, посвященном Н. И. Лобачевскому (см. стр. 7). Тщательно сопоставляя даты, Энгель приходит к твердому убеждению, что ни малейшего влияния на развитие идей Лобачевского Бартельс не имел. Бартельс уехал из Германии в 1807 г., т. е. в пору, когда взгляды Гаусса на основы геометрии, в частности, на учение о параллельных линиях, еще далеко не установились. Мы выше видели, что это было время, когда Гауссом владели еще колебания и сомнения, и он не исключал возможности доказать постулат о параллельных линиях. Единственно, что он мог бы в это время сообщить Бартельсу, это давно зародившееся у него сомнение относительно безусловной истинности евклидовой геометрии. Бартельс находился в переписке с Гауссом,

переписка эта носила спорадический характер, обмен письмами происходил через большие промежутки. Письма Гаусса у Бартельса не сохранились, но аккуратный Гаусс сохранил все письма Бартельса. Это все сообщения личного характера, никакие математические вопросы в них не затрагиваются; совершенно ясно, что математического общения между Гауссом и Бартельсом в ту пору не было. Оно и естественно: Бартельс, как мы уже не раз указывали, был человек, владевший углубленным математическим образованием, выдающийся преподаватель швейцарской школы, чрезвычайно добросовестный и полезный преподаватель Казанского университета; но к математическому творчеству он не приобщился. Между тем Гаусс вел математическую переписку, вообще находился в математическом общении только с людьми творческого типа. В 1803 г. Бартельс и Гаусс обменялись письмами, судя по письму Бартельса, несомненно тоже бытового содержания. После этого переписка между ними прерывается до 1821 г.; из письма Бартельса видно, что никаких писем он в течение этого времени от Гаусса не получал. Между тем Лобачевский обращается к вопросу о параллельных линиях в 1817 г. и сообщает своим студентам доказательство постулата о параллельных линиях. Он идет, таким образом, обычным путем, и никаких следов тех сомнений, которые владели Гауссом, не обнаруживает. Только из его «Геометрии» можно заключить, что ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях его уже (в 1823 г.) не удовлетворяло.

Таким образом, в годы своего общения с Лобачевским Бартельс не мог располагать сколько-нибудь отчетливыми сведениями о сложившихся воззрениях Гаусса на учение о параллельных линиях. С другой стороны, в рассуждениях Лобачевского до 1823 г. нельзя еще усмотреть никакого следа сомнений в безусловной и непоколебимой истинности евклидовой геометрии.

Если на протяжении всего этого времени нельзя проследить ни одного момента, который дал бы основание считать, что Бартельс получил какие-либо сведения от Гаусса о его взглядах на вопрос о параллельных линиях и сообщил о них Лобачевскому, то последующие данные совершенно исключают эту возможность. Опубликовав свои работы, Лобачевский, естественно, послал их своему учителю. В 1835 г. Бартельс уже располагал первыми

сочинениями Лобачевского. Но, по сообщению известного астронома О. В. Струве (в письме к Энгелю), Бартельс отнесся «к остроумным спекуляциям» Лобачевского отрицательно и не признавал за ними никакого научного значения. Это было бы невозможно, если бы Бартельсу были известны взгляды Гаусса на этот предмет и, в особенности, если бы Бартельс сам сообщил о них Лобачевскому. Вся совокупность этих соображений не оставляет сомнений в том, что Лобачевский пришел к своим замечательным идеям совершенно самостоятельно.

Несомненно эти соображения нашел вполне убедительными и Клейн; в печатном издании «Неевклидовой геометрии» он уже прежних соображений не повторяет.

Переписка Гаусса вскрыла ряд работ, совокупность которых можно рассматривать как предисторию неевклидовой геометрии. К этой предистории следует отнести и рассуждения Лежандра, его «Размышления», которым уделяет столько внимания Лобачевский. Рассуждения Лежандра, как мы видели, установили связь между теоремой о сумме углов треугольника и теорией параллельных линий. В дополнение к тому, что было уже сделано Насир-Эддином, Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых и что она либо во всех треугольниках равна двум прямым, либо во всех треугольниках меньше двух прямых. Эта дилемма считалась существенным достижением Лежандра и в течение долгого времени неизменно связывалась с его именем. Но в 1889 г. известный итальянский геометр Е. Бельтрами, которому, как увидим, вопросы неевклидовой геометрии в то время были очень близки, обратил внимание на замечательное, но мало известное сочинение итальянского иезуита Иеронима Саккери, в котором все результаты Лежандра не только уже были опубликованы, но даже получили значительно большее развитие. Это сочинение есть издание «Начал» Евклида с широковещательным заглавием «Евклид, освобожденный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии».[1] Оно было опубликовано в 1733 г., уже после смерти автора, умершего в том же году. Тон-

[1] G. Saccheri. Euclides ab omnii naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Mediolani, 1733.

ко анализируя Евклида, Саккери очень подробно останавливается на постулате о параллельных линиях и действительно дает этому вопросу существенно новое освещение.

Точкой отправления для Саккери служит четырехугольник, который фактически встречается уже у Насир-Эддина. Из крайних точек A и B отрезка AB восстановим к нему перпендикуляры AA' и BB', расположенные в одной плоскости по одну сторону прямой AB. На этих перпендикулярах отложим равные отрезки AA' и BB' (рис. 37). Таким образом составится четырехугольник $AA'B'B$ с двумя прямыми углами при нижнем основании AB. С четырехугольником этого типа нам уже приходилось встречаться (гл. XV стр. 178). Соединим середины C и C' оснований AB и $A'B'$; налагая четырехугольник $AA'B'B$ на себя другой стороной ($BB'A'A$), докажем, что прямая CC' перпендикулярна к обоим основаниям, а углы A' и B' равны между собой. Относительно этих углов может быть сделано три предположения: либо эти углы тупые, либо они прямые, либо острые. Саккери показывает прежде всего, что, принимая то или другое предложение относительно одного четырехугольника этого типа, мы тем самым должны принять его также относительно всех четырехугольников того же типа. Иными словами, если какой-либо один из этих четырехугольников имеет при верхнем основании, скажем, острые углы, то и все четырехугольники этого типа имеют острые же углы. Саккери называет три различных допущения, которые здесь могут быть сделаны, «гипотезой острого угла», «гипотезой прямого угла» и «гипотезой тупого угла». Саккери доказывает далее, что при гипотезе тупого угла сумма углов всякого треугольника больше двух прямых, при гипотезе прямого угла она равна двум прямым, при гипотезе острого угла она меньше двух прямых. Далее доказывается, что гипотеза прямого угла эквивалентна постулату Евклида; чтобы доказать постулат, нужно, следовательно, опровергнуть две другие гипотезы. Но если принять гипотезу тупого угла, то прямые $A'B'$ и AB сближаются

Рис. 37.

по обе стороны прямой CC' и сближаются настолько быстро, что по обе стороны должно произойти пересечение (Саккери это доказывает вполне строго); а так как две прямые не могут пересекаться в двух точках, то гипотеза тупого угла отпадает. Остается опровергнуть гипотезу острого угла. Этой гипотезе Саккери посвящает обширное исследование, занимающее около 80 страниц. Саккери показывает, что при гипотезе острого угла две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неопределенно сближаются в другую сторону. Чтобы это обнаружить, нужен ряд подготовительных рассуждений, которые Саккери проводит с безупречной строгостью. Он показывает при этом, что перпендикуляр к стороне острого угла (при гипотезе острого угла) сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный — первый не пересекающий — перпендикуляр и т. п. Словом, это целая геометрическая система, соответствующая гипотезе острого угла. Но эта тонкая нить безупречных рассуждений внезапно прерывается теоремой XXXIII, в которой Секкари заявляет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии». В чем же сказывается это противоречие? Рассматривая неограниченно сближающиеся прямые как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке, Саккери приходит к заключению, что из этой бесконечно удаленной точки к обеим прямым можно было бы провести общий перпендикуляр, что «противно природе прямой линии». Человек, чрезвычайно тонко разбирающий доказательства Прокла, Насир-Эддина и Клавия, искусно вылавливающий глубоко сокрытую логическую ошибку, запутывается сам в элементарных рассуждениях, потому что он не имеет твердых оснований для суждения о том, в какой мере можно пользоваться бесконечно удаленными точками. При всей категоричности, с которой формулирована XXXIII теорема, Саккери, очевидно, чувствует слабость этих рассуждений, ибо он заканчивает следующим примечанием:

«На этом я мог бы спокойно остановиться; но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная ги-

потеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе». Этому посвящены следующие теоремы настоящей книги.

Возвращаясь, таким образом, вновь к гипотезе острого угла, Саккери показывает, что геометрическое место точек в плоскости, удаленных на данное расстояние от данной прямой, представляет собой кривую линию («кривая равных расстояний», «эквидистанта», как ее теперь называют). За этим следует подробный анализ этой кривой, совершенно правильный до тех пор, пока он не приступает к определению ее длины при помощи метода бесконечно малых. Здесь он вновь впадает в ошибку, которая заставляет его отвергнуть гипотезу острого угла. Но и здесь он кончает примечанием, указывающим, что и эти рассуждения его, в сущности, не удовлетворяли.

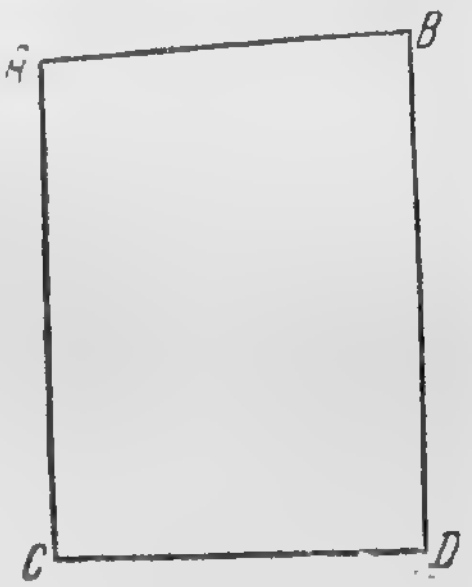


Рис. 38

«Не могу не указать здесь, — говорит он, — разницы между приведенными опровержениями обеих гипотез. При гипотезе тупого угла дело ясно, как свет божий... Между тем опровергнуть гипотезу острого угла мне не удается иначе, как доказав, что эта длина равна длине ее прямолинейного базиса».

Аналогичную постановку вопроса мы находим в сочинении математика и философа Генриха Ламберта «Теория параллельных линий», относящемся к 1766 г.[1]

Ламберт рассматривает четырехугольник, имеющий три прямых угла (рис. 38) *A, C, D*; относительно четвертого угла *B* могут быть опять три гипотезы: либо это угол тупой, либо прямой, либо острый. Ламберт рассматривает каждую гипотезу отдельно и в некоторых отношениях уходит значительно дальше Саккери.

Во-первых, Ламберт указывает, что гипотеза тупого угла оправдывается на сфере, если присвоить окружностям большого круга роль прямых линий: так как окруж-

[1] И. Г. Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728—1777) написал ряд выдающихся сочинений по физике, логике и теории познания. Сочинение «Theorie der Parallellinien» было опубликовано в 1786 г., после смерти автора, в журнале «Magazin für die reine und angewandte Mathematik», Leipzig, 1786; помещено также в «Собрании первоисточников» Энгеля и Штекеля, стр. 152—207.

ности эти имеют по две общие точки, то предложение, при помощи которого эта гипотеза отвергается на плоскости, здесь не находит применения.

Во-вторых, он ведет гипотезу острого угла еще дальше, нежели Саккери: он знает, например, что при этой гипотезе площадь треугольника должна быть пропорциональна разности между $2d$ и суммой его углов. Стройность умозаключений, к которым ведет гипотеза острого угла, и в особенности упомянутый сейчас факт, наводит его даже на следующее размышление:

«Я склонен даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. Должна же быть причина, вследствие которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это легко может быть сделано со второй гипотезой».

Высокоодаренные люди часто предвосхищают открытия. Слова Ламберта оправдались ровно через сто лет.

В-третьих, наиболее важная заслуга Ламберта заключается в том, что он не впал в заблуждение и не признал достаточным ни одного доказательства, опровергающего гипотезу острого угла.

«Доказательства евклидова постулата, — говорит он, — могут быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

В другом месте Ламберт восклицает:

«В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива!

И все же я желал бы, несмотря на это преимущество,[1] чтобы это было не так, потому что это было бы сопряжено с целым рядом других неудобств. Тригонометрические таблицы стали бы бесконечно пространными; подобие и пропорциональность фигур не существовали бы вовсе; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, как в абсолютной своей величине, и астрономии пришлось бы плохо».

Указывая ряд абсурдов с точки зрения наших представлений, к которым приводит гипотеза острого угла, Лам-

[1] Существование абсолютной меры длины.

берт замечает, что все это не дает логического доказательства, что все это, как он выражается, argumenta ab amore ac invidia ducta,[1] — аргументы, которым не может быть места в геометрии. Как и профессор Кестнер, много занимавшийся теорией параллельных линий, быть может, лучший знаток этого вопроса в XVIII в., как и ученик последнего, Клюгель, Ламберт приходит к твердому выводу, что все попытки доказать постулат Евклида не привели ни к чему.

Мы изложили предисторию неевклидовой геометрии в той последовательности, в которой развертывались отдельные ее моменты. Обращаясь теперь к хронологической последовательности их, мы видим, что развитие идей, на базе которых развернулась неевклидова геометрия, происходило в следующем порядке.

Точкой отправления все время служат доказательства постулата о параллельных линиях. Сначала эти доказательства носят наивный характер; потом они становятся все серьезнее в том смысле, что содержащаяся в них погрешность все глубже скрывается. По методу они распадаются, главным образом, на две категории. Одни явно предпосылают допущение, эквивалентное постулату Евклида, другие ведут доказательство от противного; иными словами, делается допущение, противоположное постулату, и из него выводят следствия с целью притти к противоречию с установленными уже предложениями. Одни авторы приходят к кажущемуся противоречию очень скоро, усматривая его в том, что выводы резко расходятся с интуицией, с указаниями глаза; но в этом нет логического противоречия с установленными уже предложениями. Другие тонко ведут свою дедукцию, приходят к выводам, которые можно рассматривать как начальные предложения неевклидовой геометрии. Далеко в этом направлении прошли Саккери и Ламберт; последний уже не впал в заблуждение и высказывает даже суждение, которое можно рассматривать как первое предвосхищение неевклидовой геометрии, как признание возможности, что «Начала» Евклида не должны считаться необходимой и единственной системой геометрии. Твердо на эту точку зрения становится Гаусс. Концепция неевклидовой геометрии ему уже ясна. Однако, в процессе действительно-

[1] «Аргументы, вызываемые любовью и недоброжелательством».

го создания неевклидовой геометрии он делает только первые элементарные шаги, а главное, эти свои взгляды и результаты он тщательно скрывает, сознательно не делает их достоянием гласности. Его сателлиты — люди, которые находятся с ним по этим вопросам в научном общении, останавливаются на первых шагах; отчасти это происходит потому, что они не в состоянии преодолеть те трудности, с которыми связано продвижение в этом направлении, отчасти потому, что они не получают со стороны Гаусса той поддержки, на которую они в праве рассчитывать, которая им морально необходима.

Действительными творцами неевклидовой геометрии являются Лобачевский и после него Больай. Лобачевский первый опубликовал систему неевклидовой геометрии, и притом не только ее основы, но и далеко идущее развитие, указал ее применение к анализу, предусмотрел то значение, которое она может иметь в механике, в естествознании. По сравнению с его работами достижения Больай представляют только первые элементарные шаги.

Оставляя же научную сторону дела и переходя к моральной, нельзя не поставить Лобачевскому в особую заслугу, что он не убоялся «крика беотийцев», не устрашился, как Гаусс, «ос, которые поднимутся над его головой». Не встретив сочувствия, он не сжег своих работ, как Тауринус, не впал в меланхолию, как Больай. Напротив, он вел огромную административную работу; он жил с людьми и для людей. И в то же время он мужественно боролся за свои идеи всю жизнь, проходя через тяжкие переживания, грубые обиды. Не встретив на своем жизненном пути ни единого человека, который бы понял и оценил его идеи, он на краю могилы еще раз продиктовал для потомства свое великое научное завещание.

XXV. Интерпретации неевклидовой геометрии

(К столетию со дня рождения Лобачевского)

Примерно к тому времени, когда со дня рождения Лобачевского исполнилось 75 лет, его работы сделались известными, его замечательные идеи получили первое признание. Однако все еще оставался неразрешенным вопрос, на котором было сосредоточено внимание Лобачевского в течение всей его жизни. Задача, которую он себе ставил, заключалась в установлении, как теперь говорят, «не-

противоречивости» созданной им геометрической системы; это требовало точного доказательства того, что никакое дальнейшее развитие этой системы не может привести к противоречию. Как мы уже видели, такое доказательство Лобачевский усматривал в том, что выводы и заключения, к которым различными путями приводили многообразные геометрические рассуждения, всегда были согласны между собой, — что выводы эти аналитически проистекают из уравнений, несомненно совместных, — что значения определенных интегралов, получаемые при помощи неевклидовой геометрии при чисто аналитической их проверке, всегда оказываются правильными. И субъективную уверенность в правильности новой геометрии эти доводы действительно давали. Теперь, когда идеи Лобачевского стали достоянием значительного числа геометров, этой уверенностью проникались все, усваивавшие новую геометрию; но она все же еще оставалась логически не оправданной; это еще была вера, а не безупречно установленный научный факт. Между тем противники все еще стояли на том, что вся геометрия Лобачевского — сплошная фантазия, не заслуживающая внимания.

Эта фантазия была в следующую четверть века претворена в реальную действительность. Первым осуществил это итальянский геометр Евгений Бельтрами (1835—1900).

Мы уже говорили выше (гл. XIII, стр. 149) о поверхностях, на которых может быть построена геометрия в том же порядке идей, теми же общими методами, при помощи которых развертывается геометрия на плоскости. Мы видели, что в пространстве Лобачевского (в пространстве, в котором осуществляется его геометрия), существуют три типа такого рода поверхностей: на поверхности шара действует сферическая геометрия; на плоскости имеет место геометрия Лобачевского, а на своеобразных предельных поверхностях — геометрия Евклида. Между тем в нашем обычном евклидовом пространстве существуют только два типа поверхностей, на которых теми же средствами может быть построена внутренняя геометрия: на поверхности шара имеет место та же сферическая геометрия, на плоскости — евклидова геометрия.

Не естественно ли предположить, что в евклидовом пространстве должны также существовать поверхности,

несущие на себе геометрию Лобачевского? К ответу на этот вопрос привели концепции иного рода, но результат оказался положительным. Оказалось, что в обычном евклидовом пространстве существуют поверхности, которые несут на себе геометрию, — вернее, планиметрию — Лобачевского. Однако это имеет место только при некоторой модификации самой постановки вопроса. Это требует выяснения.

К выделению поверхностей, несущих на себе ту или иную геометрию в том смысле, как об этом шла речь выше (гл. XIII), привело требование, чтобы на них было возможно свободное продвижение фигур без деформации, чтобы на них было возможно, оставаясь на поверхности, производить наложение одной фигуры на другую.

В евклидовом пространстве, как уже сказано, есть только два типа поверхностей, на которых возможно такое передвижение фигур, — это плоскости и сферы. Но можно это требование несколько ослабить, не изменяя его по существу, и тогда количество поверхностей, ему удовлетворяющих, значительно возрастает. Можно, например, говорить о наложении фигур на поверхности цилиндра: движение фигуры на цилиндрической поверхности будет при этом сопровождаться некоторой деформацией — изгибанием, но никакие размеры ее не будут при этом изменяться. Это становится ясным, если вообразим себе навернутый на цилиндр кусок бумаги, который мы можем передвигать по поверхности этого цилиндра, не подвергая его никаким растяжениям, не образуя на нем никаких складок, подвергая его только изгибанию. Будем теперь на поверхности цилиндра считать равными две фигуры, которые могут быть приведены в совмещение именно таким передвижением, хотя бы сопровождаемым изгибанием. Это вполне естественно, потому что такие две фигуры окажутся также равными (конгруэнтными в обычном смысле этого слова), если обе их развернуть на плоскость. На рис. 39 изображены два треугольника, которые могут быть таким образом приведены в совмещение. При таком условии окажется, что и поверхность цилиндра несет на себе обыкновенную евклидову геометрию.

Если с этой точки зрения подойти к другим поверхностям, если искать поверхности, на которых возможно наложение именно в этом смысле слова (при помощи передвижения, сопровождаемого изгибанием), то число по-

верхностей, на которых это возможно, значительно возрастает. И, что для нас важнее всего, как показал Бельтрами, в обыкновенном (евклидовом) пространстве существуют поверхности, которые в этом смысле слова несут на себе двумерную геометрию (планиметрию) Лобачевского. Части такой поверхности имеют как бы седлообразный вид: они в одном направлении обращены, скажем, вверх (как седло по ребру лошади), а в перпендикулярном направлении — вниз (как седло поперек лошади) (рис. 40).

Рис. 39.

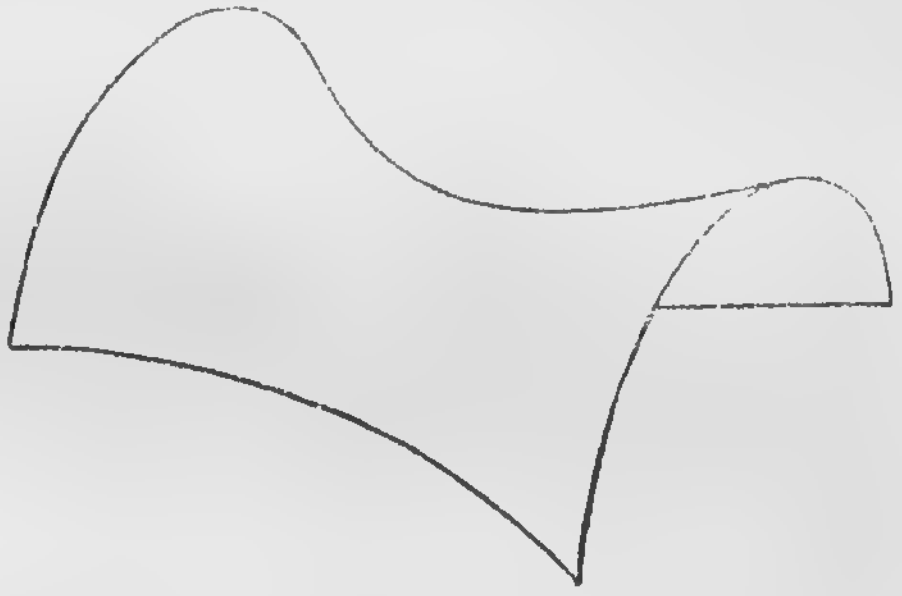


Рис. 40.

Бельтрами назвал такие поверхности п с е в д о с ф е р и ч е с к и м и. Все соотношения плоской геометрии Лобачевского, уравнения, связывающие стороны и углы геодезического треугольника, связь между радиусом и длиной окружности, ее площадью и т. п., здесь выполняются в точности, совершенно так же, как это было предусмотрено планиметрией Лобачевского. Каждый, кто был в этом отношении заражен скепсисом, мог это проверить прямым измерением на многочисленных моделях таких поверхностей. Планиметрия Лобачевского получила осуществление на реальных образах, фантазия обратилась в действительность.

Читатель, обладающий некоторым математическим образованием, пожелает, конечно, получить об этих поверхностях более четкие сведения. Ему достаточно будет для этого иметь ясное представление о так называемой кривизне (точнее, гауссовой кривизне) поверхности в заданной на ней точке. Три факта при этом должны быть ему известны. Мы начнем с первых двух, по существу тесно между собою связанных. Во-первых, кривизна поверхности

в каждой ее точке вполне определяется ее основной метрической формой

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad (42)$$

где u и v — координаты точки на поверхности, а E, F и G суть функции от u и v. Во-вторых, при изгибании поверхности кривизна в каждой ее точке не изменяется (сохраняет свое значение, остается инвариантной). По существу это, конечно, вытекает из первого факта, потому что изгибание поверхности математически тем и определяется, что коэффициенты E, F, G при той же координации сохраняют свои значения, а вместе с тем сохраняет свое значение и кривизна поверхности в каждой ее точке.

Предположим теперь, что поверхность допускает движения в самой себе, хотя бы путем изгибания, притом такие движения, что каждая точка поверхности может быть совмещена с любой другой ее точкой. Положим, что при некотором таком передвижении поверхности в самой себе точка M совместится с точкой M'. Так как кривизна в каждой точке передвигаемой поверхности сохранит свое значение, то она имеет в точке M' то же значение, что и в точке M. Если свобода передвижения на поверхности такова, что каждая ее точка может быть приведена в совмещение с любой другой точкой, то отсюда следует, что такая поверхность должна иметь во всех своих точках одну и ту же кривизну: это должна быть поверхность постоянной кривизны. Эта кривизна может иметь положительное значение, если в каждой точке все плоские сечения поверхности обращены в одну и ту же сторону от касательной плоскости (как это имеет место на овальной поверхности), или отрицательное значение, если эти сечения обращены частью в одну, частью в другую сторону (как это имеет место на седлообразной поверхности); она может иметь также нулевое значение (цилиндр, конус, всякая поверхность, развертывающаяся на плоскость). Замечательно, однако, что постоянство кривизны составляет не только необходимое, но и достаточное условие того, чтобы поверхность допускала скольжение по самой себе хотя бы путем изгибания: всякая поверхность постоянной кривизны может передвигаться в самой себе с тремя степенями свободы, как это имеет место на плоскости и на сфере. Отсюда явно вытекает, что каждая поверхность постоян-

ной кривизны допускает свою внутреннюю геометрию, устанавливаемую методом наложения.

Вот из этого именно факта Бельтрами и исходил. Совершенно ясно, что в нашем обыкновенном пространстве, поверхности нулевой кривизны, т. е. такой же кривизны, какую во всех своих точках имеет плоскость, — поверхности, развертывающиеся на плоскость, несут на себе геометрию (планиметрию) Евклида; поверхности постоянной положительной кривизны путем изгибания развертываются на сферу такой же кривизны; они несут на себе сферическую геометрию. Какова же геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны? Бельтрами обнаружил, что на этих поверхностях имеет место двумерная геометрия (планиметрия) Лобачевского.

Какими средствами он это показал? Замысел очень простой. Представим себе поверхность, основная метрическая форма (25 и 25а) которой в некоторых координатах имеет тот же вид, что и на плоскости Лобачевского:

$$dy^2 + \frac{dx^2}{4}\left(e^{\frac{y}{k}} + e^{-\frac{y}{k}}\right)^2. \qquad (43)$$

Если вычислить кривизну этой поверхности по формуле Гаусса, то она оказывается равной $-\frac{1}{k^2}$, где k — постоянная пространства. И обратно: на всякой поверхности, имеющей кривизну $-\frac{1}{k^2}$, основная метрическая форма в надлежащих координатах может быть приведена к виду (43). Иначе говоря, поверхность постоянной отрицательной кривизны имеет ту же основную метрическую форму, что и плоскость в геометрии Лобачевского.

Теперь остается учесть третий факт, заключающийся в том, что основной метрической формой поверхности вполне определяется внутренняя ее геометрия. Так как поверхность постоянной отрицательной кривизны имеет ту же основную метрическую форму, что и плоскость Лобачевского, то она всегда несет на себе геометрию (планиметрию) Лобачевского. Как уже было сказано, Бельтрами назвал поверхности постоянной отрицательной кривизны псевдосферическими. Его замечательное открытие можно поэтому формулировать так: на всякой псевдосферической

поверхности осуществляется геометрия Лобачевского.

Впечатление, произведенное этим открытием, было громадно. Поражало главным образом то, что внутреннее усмотрение Лобачевского — можно сказать, чутье гениального геометра, — через фантастическую, на первый взгляд, гипотезу, через тонкие логические рассуждения, через сложные аналитические вычисления привело к неожиданной реальной действительности, которой не предусматривал сам автор. Теория здесь в «чистой математике» предвосхитила опыт.

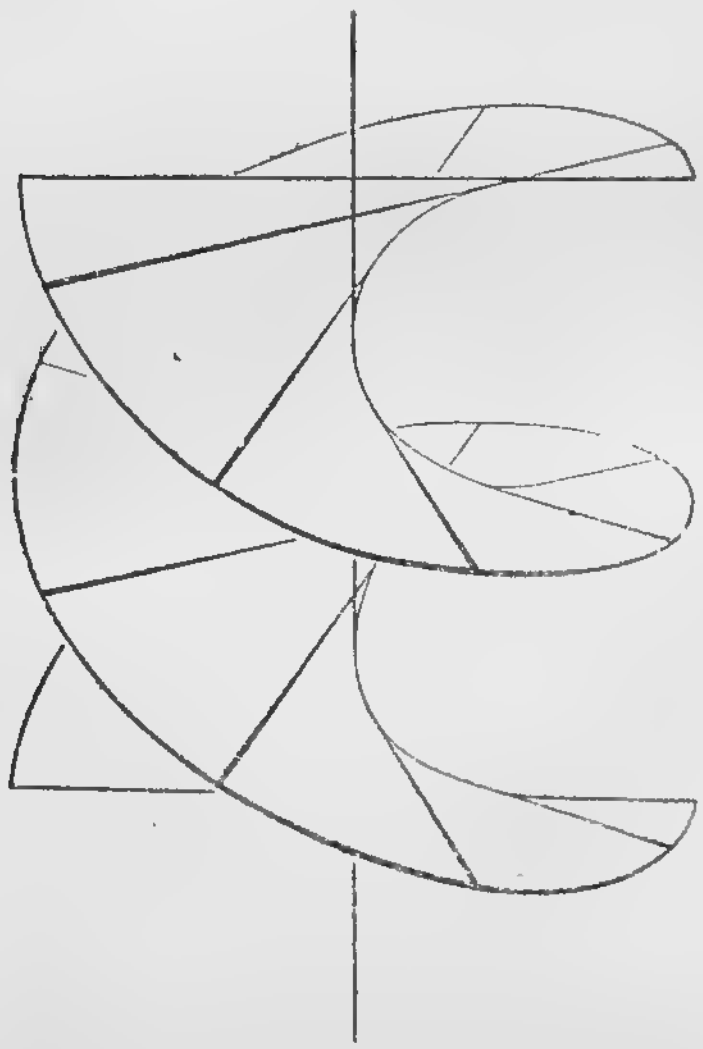


Рис. 41.

Существует бесчисленное множество псевдосферических поверхностей. Некоторые из них изображены на рисунках 41 и 42. Особое место среди них занимает поверхность, которую просто называют псевдосферой; она изображена на рис. 43. Это поверхность, которая образуется вращением трактриссы вокруг своей директриссы.[1] Все эти поверхности были конкретно осуществлены, — точнее, были изготовлены модели их, и все результаты измерений, как этого требовала теория, конечно, совпадали с предсказаниями плоской геометрии Лобачевского.

Сомнения в логической правильности геометрии Лобачевского, казалось бы, должны были исчезнуть: то, что конкретно, материально осуществляется, не может содержать в себе логического противоречия, не может быть абсурдом. Вопрос, вызвавший сомнения, казалось, был решен, но высоки требования математика к каж-

[1] Под трактриссой, по инициативе Лейбница, разумеют кривую, (рис. 44), которую описывает материальная точка, влекомая нитью постоянной длины *r*, другой конец которой скользит по прямой — ее директриссе; касательная в каждой точке, отсчитываемая от этой точки до директриссы, сохраняет таким образом постоянную длину. Число *r* называется параметром трактриссы.

дому утверждению, которое он признает строго обоснованным. Здесь все же возникают сомнения, которые могли у читателя появиться еще раньше. Мы говорили выше; что геометрия круглого цилиндра совпадает с геометрией евклидовой плоскости. Но ведь на круглом цилиндре па-

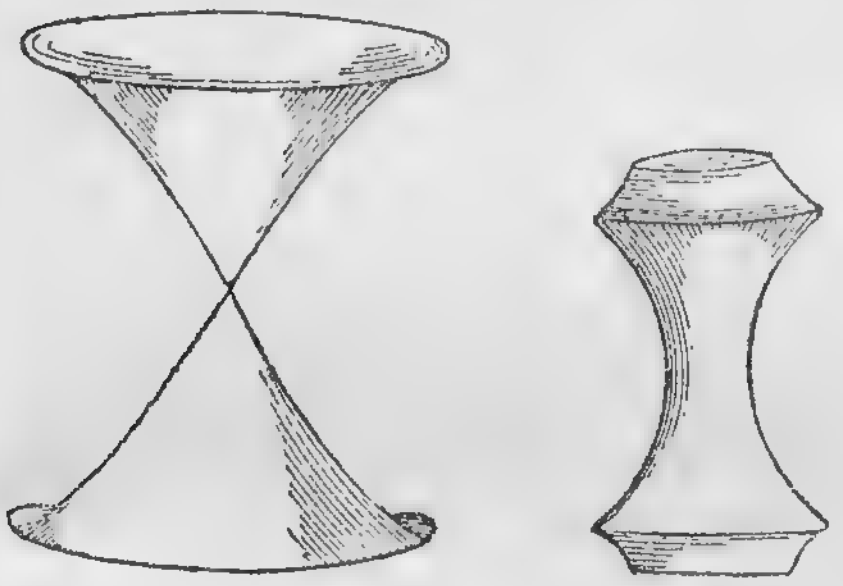


Рис. 42.

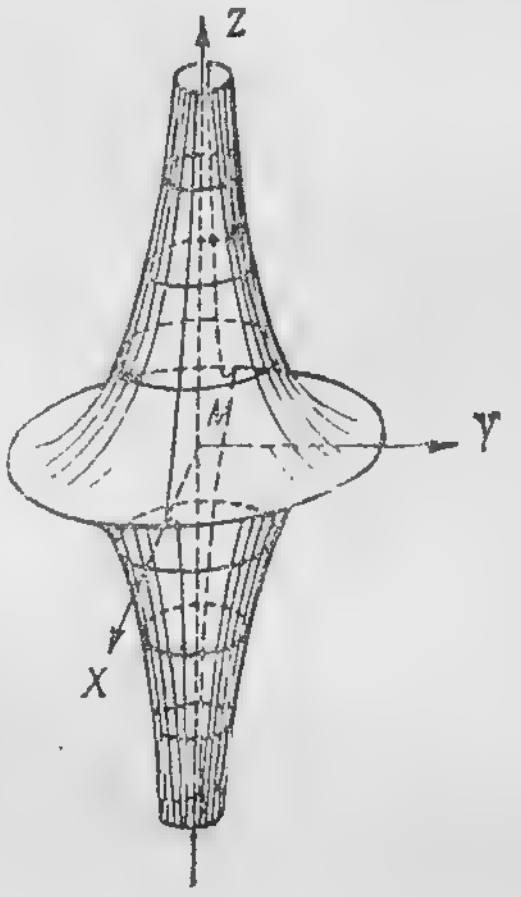


Рис. 43.

раллели суть геодезические линии; на нем, таким образом, имеются замкнутые, конечные геодезические. Между тем на евклидовой плоскости все прямые бесконечны, неограниченно простираются в обе стороны. Полного совпадения геометрии круглого цилиндра с геометрией евклидовой плоскости, таким образом, нет. Как же выразить точно то

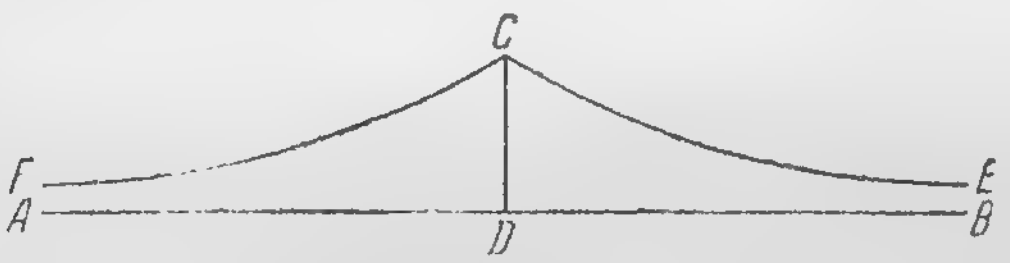


Рис. 44.

совпадение, которое действительно имеет место? Это отнюдь не трудно сделать. Дело заключается в том, что на круглом цилиндре евклидова геометрия осуществляется только л о к а л ь н о. Это нужно понимать следующим образом. Разрезав круглую цилиндрическую поверхность по образующей, мы можем развернуть ее на плоскость; но она развернется, конечно, не на всю плоскость, а только на полосу, содержащуюся между двумя параллельными

прямыми. И то, что происходит внутри этой полосы, вполне осуществляется на цилиндрической поверхности; то же, что происходит вне этой полосы, на цилиндр непосредственно не переносится. В этом заключается локальное (местное) совпадение геометрии цилиндра и плоскости.

То же самое происходит и на псевдосфере: она не отображает всей плоскости Лобачевского, ее геометрия только локально совпадает с геометрией плоскости. Поэтому отображение неевклидовой плоскости на псевдосфере не доказывает со всей необходимой точностью, что планиметрия Лобачевского полностью на всем протяжении плоскости свободна от противоречий. Это возражение отпало бы, если бы была найдена такая псевдосферическая поверхность, на которой плоскость Лобачевского отображалась бы целиком. Что стоит на пути этого? Вглядываясь в рис. 41, 42, 43 различных псевдосферических поверхностей, видим, что на каждой из них имеются либо конические точки, либо ребра, вообще особенные точки или линии. Поэтому, чтобы найти такую псевдосферическую поверхность, на которой плоскость Лобачевского отображалась бы целиком, нужно прежде всего разыскать псевдосферическую поверхность, которая не имеет никаких особенных точек. На этом было сосредоточено внимание многих геометров в течение почти четверти века. Но в 1901 г. Гильберту удалось обнаружить, что таких поверхностей вовсе не существует.[1] Прекрасный замысел Бельтрами далеко продвинул решение вопроса о непротиворечивости неевклидовой геометрии, но все еще не довел его до конца.

Мемуар, в котором идеи Бельтрами были изложены, носил название «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии».[2] Помимо того значения, которое эта работа имела в деле признания неевклидовой геометрии, она сыграла еще одну весьма важную роль.

---

[1] D. Hilbert. Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung. Transactions of the american. Math. Soc., *2*, 1901. См. также D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig — Berlin, VII Auflage, Anhang V.

[2] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di matematiche, *6*, 1868.

Мемуар переведен на русский язык «Опыт объяснения неевклидовой геометрии»: он помещен в казанском сборнике «Об основаниях геометрии».

В терминологии Бельтрами его результат выражался так: псевдосферическая поверхность является «интерпретацией» неевклидовой геометрии; мы теперь говорим — частичной, локальной ее интерпретацией. Была уяснена мысль, что одна и та же геометрическая система допускает различные, даже многообразные интерпретации, различные формы осуществления. Это был чрезвычайно важный шаг вперед в деле выяснения сущности и значения геометрии. Задача о непротиворечивости теперь заключалась в том, чтобы найти такую интерпретацию, которая осуществляла бы геометрию Лобачевского целиком, и притом не только в плоскости, но и в трехмерном пространстве. Это было выполнено; идеи трех замечательных геометров, объединенные в один замысел, привели к окончательному решению задачи. Геометры эти — Евгений Бельтрами, Бернгард Риман и Феликс Клейн.

В 1854 г. Риман, имя которого хорошо известно всякому, кто стоит близко к математике, вступил доцентом в профессорскую коллегию Гёттингенского университета. Для этого он должен был прочесть в общем собрании факультета пробную лекцию. Следуя принятому обычаю, он представил на усмотрение факультета три темы, из которых Гаусс выбрал третью, носившую название «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». При составлении этой лекции Риман в качестве слушателя явно имел в виду главным образом Гаусса, и потому лекция была составлена очень сжато; это скорее конспект, наметки ряда глубоких идей, нежели готовая к печати работа. Именно поэтому Риман ее не опубликовал, очевидно имея в виду ее развить. Но он не успел это сделать. Дедекинд извлек рукопись уже из наследия Римана и опубликовал ее в 1866 г. Идеи, в этой работе изложенные, имеют тесное соприкосновение с работами Лобачевского.

Риман начинает с установления понятия о «многообразии» (Mannigfaltigkeit) как о совокупности элементов — объектов, выделенных, включенных в его состав определенными признаками. В настоящее время термину «многообразие» предпочитают другой: по почину Кантора его называют м н о ж е с т в о м. Это очень широкое понятие: всякая совокупность конкретных или абстрактных объектов, всякий коллектив вещей, понятий, идей представляет собой множество.

Риман изучает множества особой категории, именно

такие, в каждом из которых элемент может быть определен несколькими числовыми заданиями или, просто говоря, несколькими числами; количество этих чисел характерно для множества. Если элемент множества определяется n числами, то говорят, что оно имеет n измерений. Плоскость есть множество, элемент которого (точка) определяется двумя числовыми заданиями (двумя ее координатами) — это есть двумерное множество. В таком же смысле сферическая, цилиндрическая, да и всякая вообще поверхность может быть рассматриваема как двумерное множество точек. Связка лучей в пространстве, выходящих из одной точки, также есть двумерное множество, потому что элемент этого множества определяется двумя числовыми заданиями (в терминах, принятых в астрономии: высотой и азимутом); совокупность всех прямых на плоскости также есть двумерное множество. Каждая точка пространства определяется тремя числовыми заданиями (тремя координатами); пространство в обычном значении этого слова есть трехмерное множество точек; как обычно говорят, пространство имеет три измерения. Совокупность всех прямых в пространстве есть четырехмерное множество. В самом деле, зафиксируем какую-нибудь плоскость Q; прямая в пространстве определяется двумя координатами ее «следа» на плоскости Q, т. е. точки M, в которой она встречает плоскость Q, и двумя числами, которыми она определяется в связке прямых, выходящих из точки M. Совокупность всех окружностей на плоскости есть множество трех измерений; каждый ее элемент — окружность — определяется координатами центра и радиусом; совокупность всех сфер в пространстве есть множество четырех измерений. Совокупность всех эллипсов на плоскости есть множество пяти измерений.

Но многообразие не должно быть непременно составлено из элементов обыкновенного геометрического типа, в обычном понимании этого слова. Гельмгольц, например, стоял на точке зрения, принятой в его время, что все цвета могут быть составлены из трех основных цветов, в различных количествах взятых. С его точки зрения, совокупность всех цветов есть трехмерное множество. Представим себе рой корпускул — частиц, несущихся в пространстве. В каждый момент элемент этого роя характеризуется тремя координатами точки, в которой он находится, а в течении времени еще четвертым числовым

заданием, указанием времени. Сплошной рой несущихся частиц в пространстве и во времени представляет собой четырехмерное множество. Мы остановились подробно на этом понятии потому, что оно имеет основное значение, играет в настоящее время огромную роль как в математике, так и в ее приложениях.

Основной замысел Римана заключался в том, что геометрия вовсе не представляет собой, так сказать, исключительного достояния множества точек — двумерного (поверхности) или трехмерного (пространства). Можно строить геометрию прямых, геометрию кругов, шаров; но можно итти гораздо дальше, можно строить геометрию множества цветов, геометрию роя корпускул, материальных частиц.

Если говорить об измерительной геометрии, то прежде всего необходимо установить исходный принцип для производства измерений в различных множествах; измерительную геометрию Риман именно и имел в виду. При такой широкой постановке вопроса, при таком расширении задачи геометрии возникает вопрос о том, как понимать измерение в любом множестве, как его производить, какое «мероопределение» в нем установить. Если не указать общего принципа для этого, то перспективы становятся совершенно расплывчатыми; не видно пути, по которому проникновение геометрии в другие множества должно итти. Риман это хорошо понимал. Центр тяжести его замысла, его главная заслуга в том именно и заключается, что он дал основной, исходный принцип для производства измерений в множествах, представляющих собою далеко идущее обобщение тех точечных многообразий, для которых была построена классическая геометрия.

Этот замысел Римана заключается в следующем. Вся внутренняя геометрия поверхности, как мы знаем, разматывается из основной ее метрической формы (42). Это определенная положительная форма, — она на всей поверхности имеет положительные значения, каковы бы ни были значения дифференциалов du и dv. Риман принимает, что квадрат числа, выражающего удаление двух бесконечно близких элементов множества, всегда выражается определенной положительной квадратичной формой от дифференциалов координат. Подробнее: пусть x^1, x^2, x^3,..., x^n будут координаты какого-либо элемента; следуя Риману, будем говорить: какой-либо точки множества. Пусть $x^1 + dx^1$, $x^2 + dx^2$, $x^3 + dx^3$, ..., $x^n + dx^n$ будут координаты

бесконечно близкой точки; за расстояние между этими двумя точками (за удаление этих двух бесконечно близких элементов) Риман принимает число ds, квадрат которого выражается формулой

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j; \tag{44}$$

это есть сумма членов вида $g_{ij}dx^i dx^j$, квадратичная форма, коэффициенты которой g_{ij} зависят от координат x^1, x^2, x^3,..., x^n; форма определенная положительная, т. е. имеющая всегда — во всякой точке x^1, x^2,..., x^n и при всех значениях дифференциалов — положительное значение. Может быть, будет правильно сказать, что Риман ставит своей целью изучать такого рода множества, в которых возможно и целесообразно установить понятие об удалении двух элементов при помощи формулы (44); это есть так называемое р и м а н о в о м е р о о п р е д е л е н и е.

Подобно тому как геометрию поверхности выводят из ее основной метрической формы, Риман строит геометрию множества из его основной формы. Внутри изучаемого множества n измерений могут проходить «подмножества» меньшего числа измерений, в том числе подмножества одного измерения, которые Риман называет л и н и я м и. Совершенно так же, как на поверхности, определяются геодезические линии множества, в котором установлено мероопределение (44). Во всяком таком множестве устанавливаются методы измерения длин, площадей и объемов различных размерностей. Множество с установленной в нем римановой метрикой принято называть р и м а н о в ы м п р о с т р а н с т в о м, а его геометрию, в этом порядке идей развернутую, — р и м а н о в о й г е о м е т р и е й[1] в широком значении этого слова.

Термин «риманово пространство», имеющий чисто условное, но вполне конкретное значение, вызывал не мало недоразумений. Забывали о том, что это наименование присвоено различного рода множествам, и соединяли с ним идеалистические, фантастические представления, связывали их с обыкновенным пространством. Нужно хорошо уяснить себе, что никакой мистики здесь нет, что ри-

---

[1] Подробнее об этом см. В. Ф. К а г а н. Геометрические идеи Римана и их современное развитие. М.-Л., 1933.

маново пространство есть любое множество, в котором установлено риманово мероопределение, а вместе с тем своеобразная риманова геометрия. С большим искусством Риман устанавливает понятие о кривизне в каждой точке пространства в этом широком его понимании. Дать здесь точные сведения о том, как это делается, мы не имеем возможности. Ограничимся только указанием, что кривизна в римановой геометрии устанавливается аналогично тому, как это делается на поверхности, с тою, однако, разницей, что кривизна присваивается многообразию не только в определенной его точке, а в различных площадках, через эту точку проходящих. Это до некоторой степени можно себе уяснить, сравнивая с тем, что в неизотропной среде упругое напряжение в каждой точке различно в различных направлениях площадки, на которую оно действует.

Установив эти общие понятия, Риман, естественно, ставит себе вопрос: каковы самые простые множества, несущие установленную им геометрию? Очень элементарные соображения обнаруживают, что наиболее простыми нужно считать те пространства, которые в каждой точке имеют одну и ту же кривизну во всех направлениях. Весьма замечательно, что при этих условиях кривизна не меняется от точки к точке, это — пространство постоянной кривизны.

Такие пространства естественно разбиваются на три категории: пространства постоянной положительной кривизны, их геометрию принято называть *эллиптической;* пространства постоянной отрицательной кривизны, их геометрию называют *гиперболической;* наконец, пространства нулевой кривизны, их геометрию называют *параболической.* Для большей определенности ограничимся в дальнейшем пространствами (многообразиями, множествами) трех и двух измерений.

Читатель, вероятно догадывается, что параболическая геометрия — геометрия пространства нулевой кривизны — есть геометрия Евклида; гиперболическая геометрия есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Геометрию, созданную Лобачевским, в настоящее время так и называют *гиперболической геометрией;* говорят о гиперболической геометрии плоскости и пространства.

Что же представляет собой эллиптическая геометрия? Для двумерной эллиптической геометрии ответ совершенно ясный: это есть геометрия сферы (с небольшой модифи-

кацией, на которой мы не будем здесь останавливаться), но и в трехмерной эллиптической геометрии все прямые (геодезические линии) — замкнутые, имеют конечную, и притом одну и ту же, длину; всякие две плоскости пересекаются, так же как и всякие две прямые на плоскости. Эллиптическая геометрия — это геометрия множества конечных размеров, конечного пространства.

Можно сказать: как над геометрией Евклида надстроились геометрии Лобачевского и Римана, гиперболическая и эллиптическая, так над ними теперь поднялась геометрия Римана в широком смысле этого слова. Эволюция идет и дальше, охватывая все более разнообразные множества, подчиняя геометрии все большее число своеобразных конкретных, иногда чисто материальных коллективов.

Возвратимся к работе Бельтрами. Он строил аналитически геометрию псевдосферы, но ведь это была в то же время, хотя бы и локально, гиперболическая геометрия, двумерная геометрия Лобачевского. Бельтрами, естественно, прежде всего выводит уравнение геодезической линии — прямой в гиперболической плоскости. Это уравнение мы уже привели выше; в декартовых координатах, как таковые определены (стр. 172), оно имеет вид (23) или (23а). Но Бельтрами оперирует другими координатами, на которые уравнения (23) или (23а) естественно наводят; положим

$$X = k\cos\Pi(x), \quad Y = k\sin\Pi(x)\cos\Pi(y) = k\cos\Pi(y'), \qquad (45)$$

где k — постоянная гиперболического пространства.

В координатах X, Y уравнение (11) принимает простой вид

$$X\cos\omega + Y\sin\omega = k\cos\Pi(p), \qquad (46)$$

становится линейным. Координаты X и Y теперь обыкновенно называют б е л ь т р а м и е в ы м и к о о р д и н а т а м и; можно сказать: бельтрамиевы координаты на гиперболической плоскости — это такие координаты, в которых прямая выражается линейным уравнением. Подойдем к ним геометрически. Возвратимся к рис. 21, который мы здесь с небольшой модификацией повторяем (рис. 45): здесь x и y' (а не y) суть проекции радиуса-вектора на оси OX и OY — ортогональных координат. Если длину радиуса-вектора обозначим через r, то по теореме косинусов (11е)

из прямоугольных треугольников MON и MON' имеем:

$$X = k\cos\Pi(r)\cos\omega,\quad Y = k\cos\Pi(r)\sin\omega. \tag{47}$$

Эти уравнения отличаются от формул преобразования полярных координат в декартовы в евклидовой плоскости только тем, что радиус-вектор r заменен через $k\cos\Pi(r)$; при малых значениях r формулы (47) совпадают с этими формулами преобразования. Может быть, было бы правильнее рассматривать X и Y как гиперболический аналог декартовых координат; сохраним, однако, за ними установившееся название *бельтрамиевых координат*. Бельтрами пришел к ним своеобразным путем; мы, к сожалению, останавливаться на этом не можем, мы должны уделить немногие строки, которыми мы располагаем, другим соображениям. Уравнения преобразования (47) дают

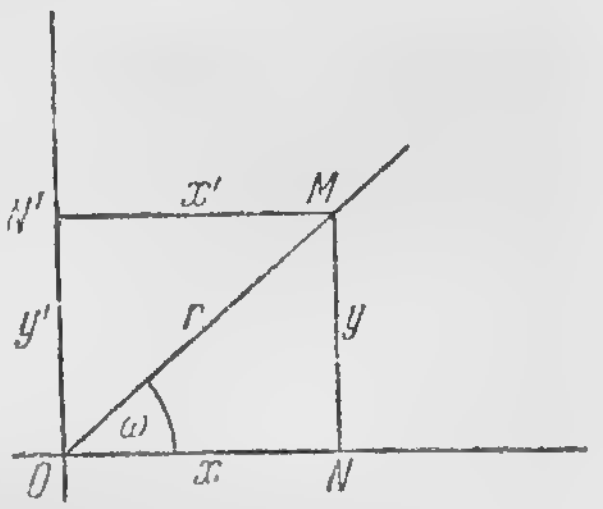


Рис. 45.

$$X^2 + Y^2 = k^2\cos^2\Pi(r) < k^2. \tag{48}$$

Это значит, что бельтрамиевы координаты всякой точки гиперболической плоскости удовлетворяют неравенству

$$X^2 + Y^2 < k^2. \tag{49}$$

Обратно, если заданы числа X и Y, удовлетворяющие этому неравенству, то из уравнения (48) получаем $\cos\Pi(r)$, вместе с тем и r, а при помощи уравнений (47) определим угол ω и точку M. Можно, таким образом, сказать, что числа X и Y служат бельтрамиевыми координатами некоторой точки гиперболической плоскости в том — и только в том — случае, когда они удовлетворят неравенству (49). Прежде чем этим воспользоваться, остановимся еще на том случае, когда

$$X^2 + Y^2 = k^2. \tag{50}$$

Уравнение (48) в этом случае дает $\cos\Pi(r) = 1$, $\Pi(r) = 0$, $r = \infty$; если числа X и Y связаны уравнением (50), то им соответствует бесконечно удаленная точка гиперболической плоскости.

Теперь поступим следующим образом. Представим себе

гиперболическую плоскость с бельтрамиевой координацией X, Y и евклидову плоскость с установленными в ней осями декартовых координат. Пусть M будет точка гиперболической плоскости (рис. 46) с бельтрамиевыми коор-

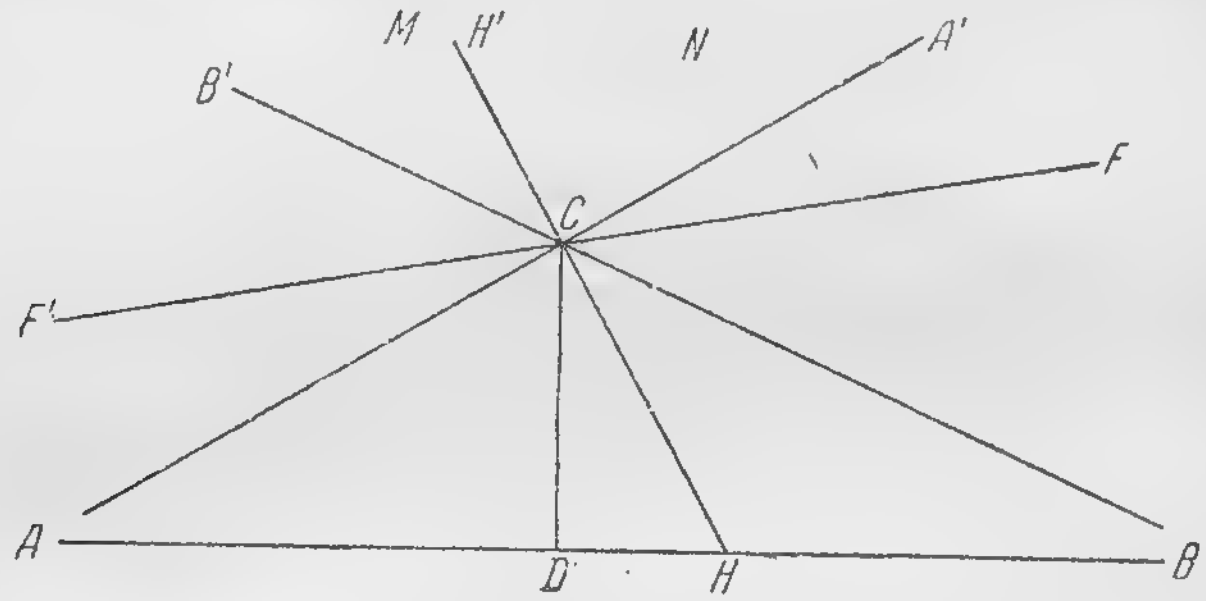


Рис. 46.

динатами X, Y; на евклидовой плоскости при установленной декартовой координации нанесем точку m, имеющую декартовы (рис. 46а) координаты X и Y. Мы можем смотреть на точку m как на изображение на евклидовой плоскости точки M гиперболической плоскости: ясно, что вся гиперболическая плоскость, все ее точки будут, таким образом, отображены на евклидовой плоскости. На последней построена карта, изображающая всю гиперболическую плоскость; на ней можно ясно видеть все, что происходит на гиперболической плоскости. Уравнение (50) на евклидовой плоскости выражает окружность радиуса k с центром в начале координат; неравенство (49) выражает, что каждая точка m, какую бы точку M гиперболической плоскости она ни изображала, падает внутрь этого «граничного» круга. Иначе говоря, вся гиперболическая плоскость отображается на круге евклидовой плоскости. При этом точки, удовлетворяющие на карте уравнению (50), т. е. лежащие на окружности граничного круга, как мы

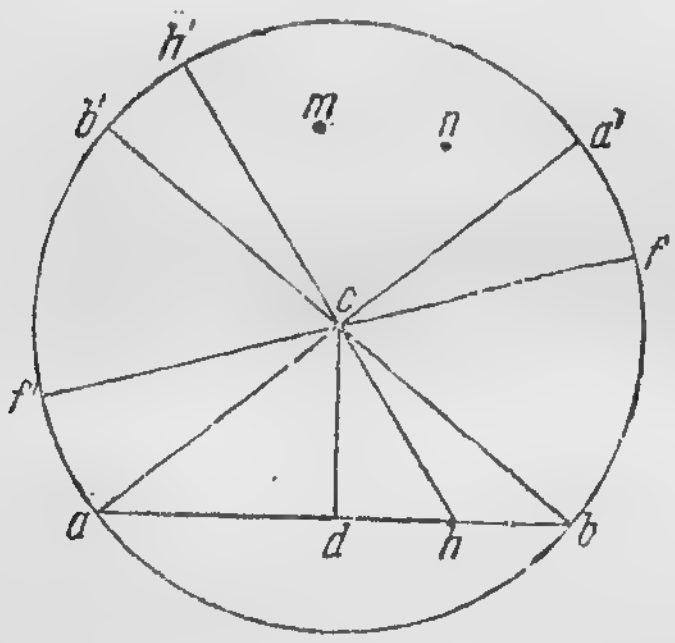


Рис. 46а.

видели, соответствуют бесконечно удаленным точкам гиперболической плоскости. Прямая гиперболической плоскости выражается в бельтрамиевых координатах линейным уравнением; но линейным же уравнением в тех же координатах X, Y на евклидовой плоскости также выражается прямая на нашем круге — его хорда. Прямые гиперболической плоскости изображаются на карте хордами граничного круга; концы хорд отвечают бесконечно удаленным точкам гиперболической прямой. Теперь пусть ab будет какая-либо хорда граничного круга, AB — соответствующая прямая на гиперболической плоскости, c — точка вне этой прямой, C — соответствующая гиперболическая точка. Пусть c — точка, лежащая в нашем круге вне прямой ab; для упрощения возьмем ее сначала в центре круга. Прямым ab, ca, cb на гиперболической плоскости соответствуют прямые AB, CA и CB; и так как точкам a и b соответствуют бесконечно удаленные точки, то CA и CB суть прямые, параллельные AB именно в том смысле, как это понимает Лобачевский. Прямые ch, проходящие внутри угла acb, пересекают хорду ab; им соответствуют на гиперболической плоскости прямые CH, пересекающие прямую AB, сходящиеся с ней. Прямые cf, проходящие внутри вертикальных углов bca' и acb', не встречают хорды ab; соответствующие им на гиперболической плоскости прямые CF расходятся с AB. Сравнивая этот рисунок с рис. 8, видим, что бельтрамиева карта в точности воспроизводит все, происходящее в гиперболической плоскости; здесь, на этом круге полностью осуществляется гиперболическая геометрия, она становится вполне доступной глазу, она совершенно утратила свой фантастический характер. Если за расстояние между двумя точками m и n принимать число, выражающее расстояние MN соответствующих точек на гиперболической плоскости и совершенно аналогично измерять углы, то и все метрические соотношения гиперболической плоскости на этой карте выполняются полностью. Углу acd отвечает на гиперболической плоскости угол параллельности, соответствующий отрезку CD. Картина изменяется очень мало, если точку c взять не в центре круга, а в произвольной его точке; мы не можем здесь на этом останавливаться.

На бельтрамиев круг в описанной здесь схеме можно смотреть как на интерпретацию гиперболической геометрии, полностью ее осуществляющую. На этом круге можно

отобразить, конечно, и всякую псевдосферическую поверхность, но только она отображается не на всем круге, а на части его; это составляет единственное слабое место интерпретации гиперболической геометрии при помощи псевдосферы. Интерпретация на бельтрамиевом круге этого дефекта не имеет; она осуществляет двумерную гиперболическую геометрию полностью. Геометрия Лобачевского воспроизведена в евклидовой плоскости и потому в отношении логической правильности она вызывает не больше сомнений, чем геометрия Евклида. Вопрос о непротиворечивости гиперболической геометрии был в этом смысле разрешен.

Изложенное построение — воспроизведение гиперболической геометрии внутри круга на евклидовой плоскости — задумано Бельтрами и завершено Клейном. Оно получает другое освещение с точки зрения идей Римана.

Основная метрическая форма гиперболической плоскости в декартовых координатах имеет вид (43). Уравнения (45) дают формулы преобразования декартовых координат в бельтрамиевы. С их помощью не трудно выразить основную метрическую форму (43) в бельтрамиевых координатах. Это вычисление приводит к следующему результату:

$$ds^2 = \frac{(k^2 - X^2)dX^2 + (k^2 - Y^2)dY^2 - 2XY\,dX\,dY}{(k^2 - X^2 - Y^2)^2}. \qquad (51)$$

Становясь теперь на точку зрения Римана, будем строить геометрию в следующем порядке идей. Рассмотрим множество точек, расположенных в евклидовой плоскости внутри некоторого круга радиуса k. Это множество будет тем пространством, внутри которого мы будем строить геометрию. Отнесем этот круг к ортогональным декартовым координатам (XY), принимая центр за начало. Следуя общему замыслу Римана, определим в этом множестве элемент длины формой (51); она будет иметь положительное значение во всякой точке круга. Геометрия этого множества при основной форме (51) есть двумерная гиперболическая геометрия. Подойдем ли мы к этой интерпретации с точки зрения Бельтрами и Клейна, или с точки зрения Римана, — мы во всяком случае получаем безукоризненную интерпретацию двумерной гиперболической геометрии. Совершенно ясно, что таким же образом трехмерное гиперболическое пространство с его геометрией может быть отображено на шаре; получаем безу-

коризненную интерпретацию трехмерной геометрии Лобачевского.

Идея интерпретации геометрии, сознание возможности ее осуществления в различных множествах, получили широкое развитие. Ближайшие годы принесли с собой чрезвычайно различные интерпретации как евклидовой, так и неевклидовой геометрии. На цилиндрической поверхности осуществляется двумерная геометрия Евклида; на круглом цилиндре — только локально, на параболическом цилиндре полностью; локально она осуществляется на всякой поверхности, развертывающейся на плоскость. Но существуют и различные другие интерпретации двумерной евклидовой геометрии; остановимся на одной из них, чрезвычайно остроумной, которая ведет начало от Пуанкаре; мы ее здесь вкратце изложим.

В евклидовой плоскости выделим произвольную точку O и изымем ее из этой плоскости. Иными словами, будем рассматривать множество, состоящее из всех точек плоскости, кроме точки O. Это множество будем называть *плоскостью Пуанкаре*. Мы будем строить геометрию в плоскости Пуанкаре. Элементами этого множества, его *точками*, будут служить точки этой плоскости (рис. 47). Но под *прямыми* мы будем теперь разуметь не обыкновенные прямые, а окружности, проходящие через точку O; в число их мы включим и прямые, проходящие через точку O, как окружности бесконечно большого радиуса. Очень любопытно, что геометрия, на этих началах построенная, есть геометрия Евклида. В самом деле, через каждые две *точки* проходит одна — и только одна — *прямая*:[1] если точки A и B не лежат на одной обыкновенной прямой с точкой O, то этой *прямой* служит окружность, проходящая через точки A, B и O; если же точки A и B лежат на одной обыкновенной прямой с точкой O, то этой *прямой* будет служить обыкновенная прямая AB. Две *прямые* обычно пересекаются в одной — и только в одной — точке, ибо две окружности, проходящие через точку O, помимо нее имеют еще одну — и только одну — общую точку. Исключение представляет только тот случай, когда эти две окружности касаются в точке O; тогда соответствующие *прямые параллельны*.

---

[1] Мы пользуемся курсивом для обозначения термина в том значении, которое он имеет в интерпретации Пуанкаре.

Прямолинейный отрезок (дугу круга) можно продолжить в обе стороны, и притом продолжить неограниченно, поскольку точка O нам недоступна (это бесконечно удаленная точка плоскости). Рассмотрим теперь *прямую* и *точку* C (рис. 48), вне ее лежащую. Можно ли через точку C провести прямую, не встречающую данной *прямой*, и если возможно, то существует ли только одна такая прямая или больше? Построение такой *прямой* сводится к

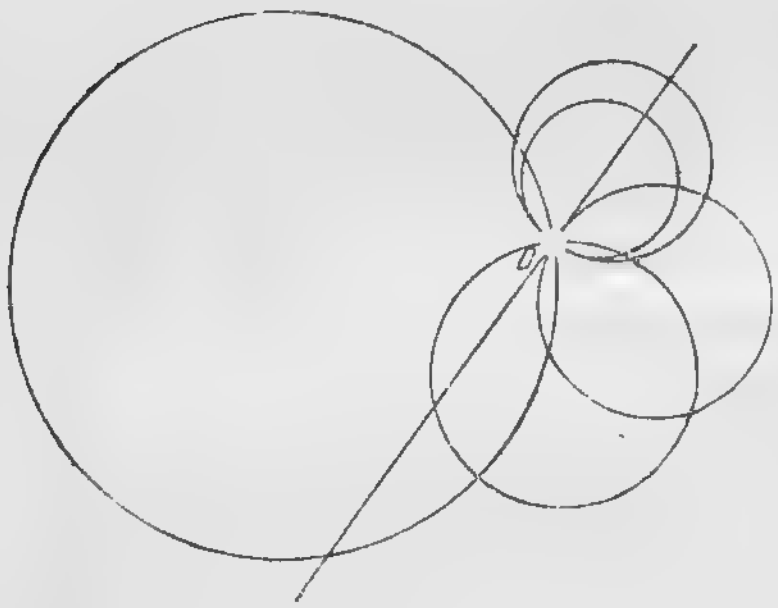


Рис. 47.

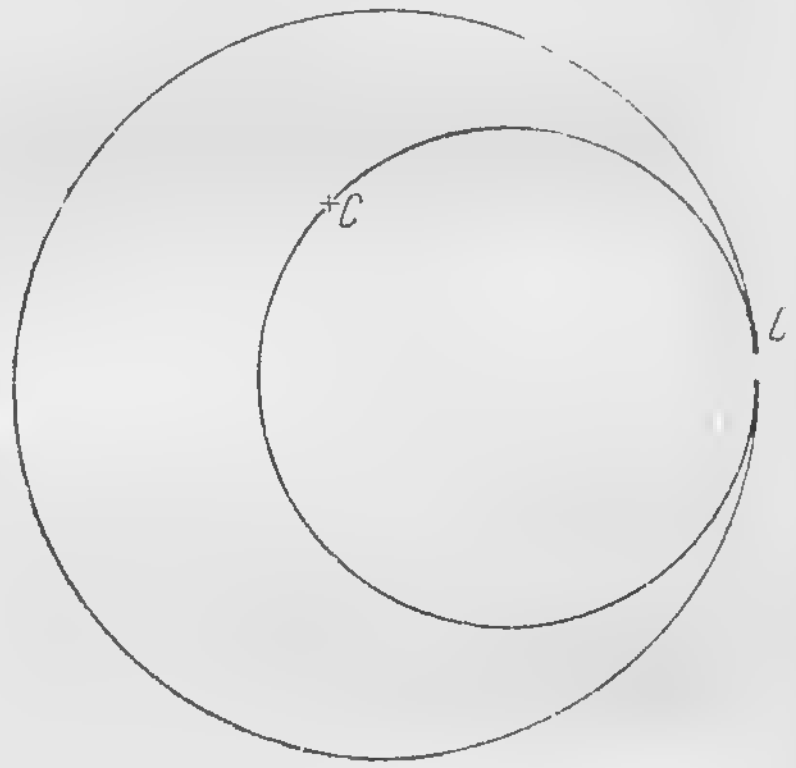


Рис. 48.

тому, чтобы через точку C провести окружность, касающуюся данной окружности в точке O. Элементарные соображения обнаруживают, что существует одна — и только одна — такая окружность.

Мы видим, таким образом, что в плоскости Пуанкаре осуществляются постулаты евклидовой геометрии; в ней поэтому имеет место евклидова геометрия. Мы пришли к своеобразной ее интерпретации.

Конечно, чтобы этот факт установить с полною точностью, нужен еще ряд дополнительных соображений. Нужно установить в этой геометрии мероопределение, нужно прежде всего установить, как измеряются длины и углы. Под *углом* между двумя *прямыми* разумеют обыкновенный угол между соответствующими окружностями. Расстояние между двумя точками выражается сложнее: мы не можем изложить здесь все эти соображения.

Совокупность окружностей, проходящих через одну точку (рис. 46), образует так называемый «пучок окруж-

ностей». Схема Пуанкаре воспроизводит параболическую геометрию в пучке окружностей. Пучок рассмотренного типа называют параболическим пучком. Мы можем, таким образом, сказать, что в параболическом пучке осуществляется евклидова геометрия; иначе говоря, Пуанкаре указал интерпретацию евклидовой геометрии в параболическом пучке окружностей.

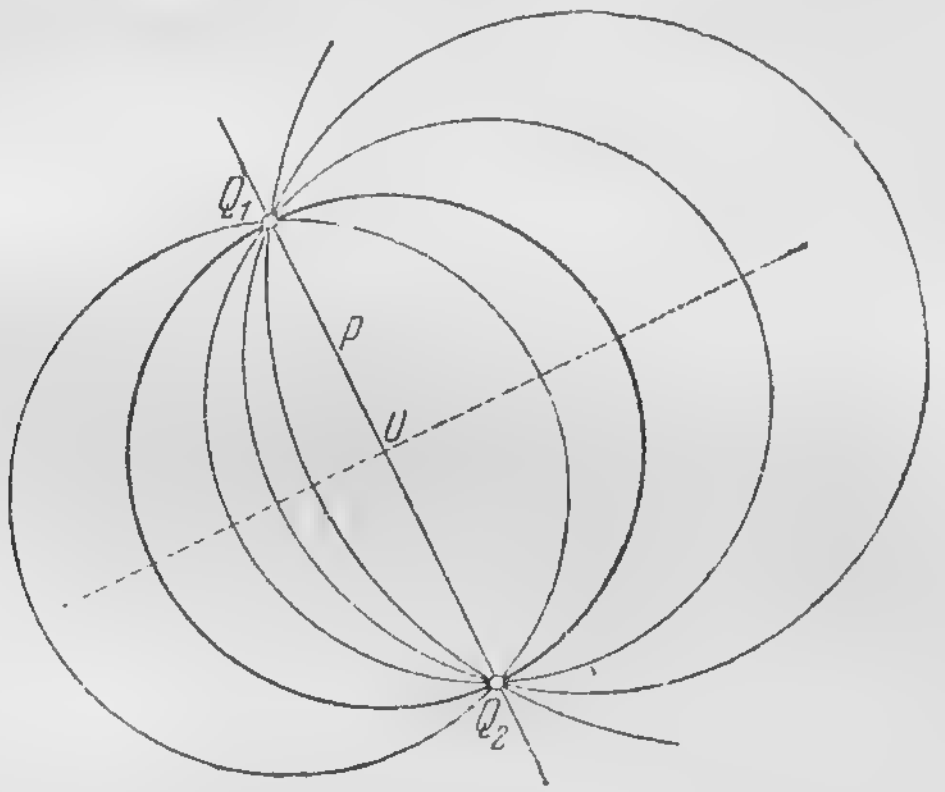


Рис. 49а.

Но пучком называют также множество окружностей другого типа. Так, например, эллиптическим пучком называют совокупность окружностей, имеющих общую радиальную ось (рис. 49а); гиперболическим пучком называют совокупность окружностей, секущих ортогонально одну и ту же окружность (рис. 49в).

Аналогично тому как в параболическом пучке устанавливается евклидова (параболическая) геометрия, в гиперболическом пучке устанавливается гиперболическая, а в эллиптическом пучке — эллиптическая геометрия. Конечно, надлежащее выяснение этого требует еще много дополнительных соображений, которых мы здесь дать не можем. Но основная мысль, полагаем, выяснена достаточно отчетливо: в различных пучках окружностей можно построить совершенные интерпретации как евклидовой, так и обоих типов неевклидовой геометрии.

В пространстве аналогом пучков окружностей служат связки сфер, и в этих связках можно построить совершен-

ные интерпретации трехмерной геометрии, евклидовой и неевклидовой, одного и другого типа. [1]

Однако в отношении всех этих интерпретаций остается вопрос, который здесь еще не выяснен. Как понимать в этих своеобразных интерпретациях движение? Чтобы это себе уяснить, нужно прежде всего обратить внимание на следующее. В геометрии мы постоянно пользуемся движением; оно играет очень важную роль в наших рассужде-

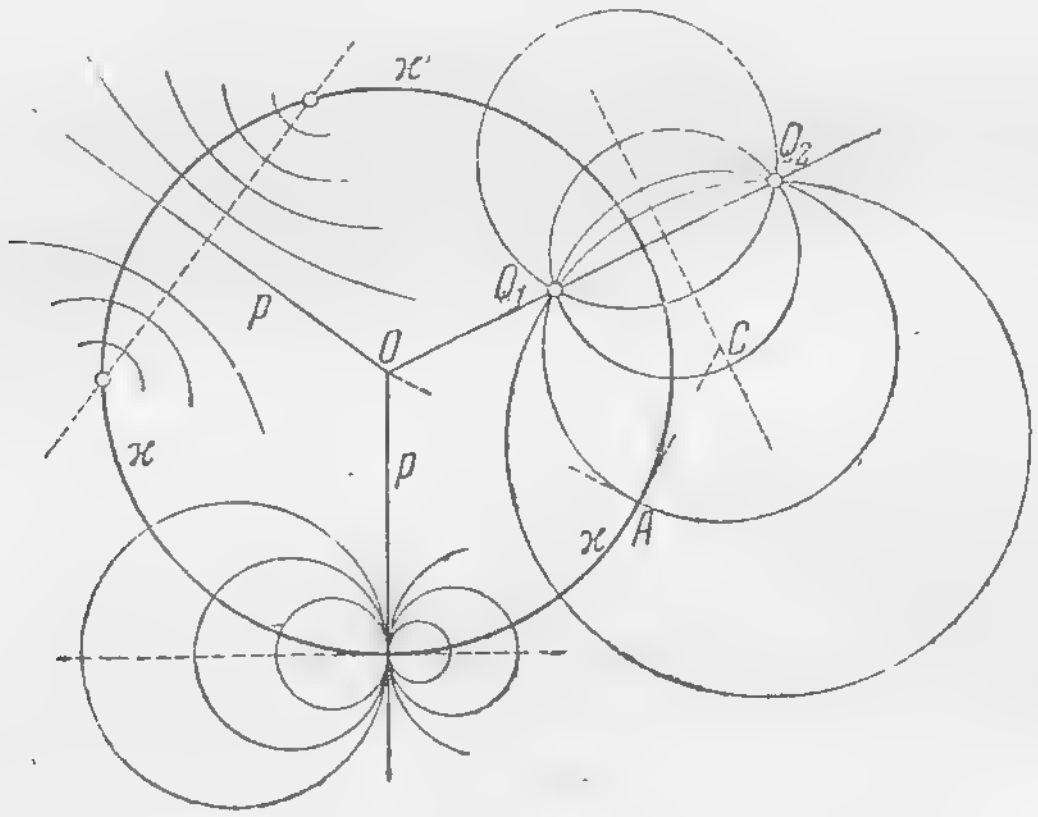


Рис. 49в.

ниях и доказательствах; а между тем фактически мы его никогда не производим. Когда мы говорим: наложим треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$, то мы ведь в действительности не переносим треугольника на другое место, — это и невозможно. Если вникнем в то, чем мы собственно интересуемся, когда пользуемся в геомегрии движением тела, то увидим, что нам всегда важно только знать, с какой точкой при этом совмещается каждая точка переносимого тела. Каждой точке A первого тела отвечает некоторая точка A' второго тела, с которой она совмещается после перенесения. Мы устанавливаем, таким образом, соответствие между точками первого и второго тела; мы мысленно осуществляем это соответствие при помощи дви-

[1] Подробную разработку этих идей читатель может найти во II томе «Энциклопедии элементарной математики» Вебера и Вельштейна. Одесса, 1914.

Н. И. Лобачевский

Бюст работы М. Л. Диллон

жения, так как точка A' второго тела есть та, в которую движение переносит точку A. Но если мы то же соответствие установим как-нибудь иначе, то роль механического движения будет исчерпана, — оно уже не будет нужно. Этот процесс не представляет исключительной принадлежности геометрии; напротив, это — чрезвычайно важное, неотъемлемое орудие нашей мысли. «Чрезвычайно важную и характерную способность нашего ума, — говорит Дедекинд, — представляет собой процесс, заключающийся в том, что мы относим одну вещь к другой»; этот процесс в логике и психологии называют ассоциацией; в математике его называют сопряжением одного множества с другим, отображением одного множества на другом. Второе множество может совпадать с первым; мы тогда говорим, что оно приведено в соответствие с самим собой, отображено на самом себе или что оно преобразовано в себя самого.

Такое соответствие в геометрии устанавливают движением; более того, движение играет в геометрии исключительно ту роль, что оно устанавливает некоторое отображение пространства на самом себе.

Чтобы это лучше выяснить, возьмем простой пример. Пусть AB будет некоторый отрезок. Каждой точке C этого отрезка, которая отстоит на расстояние c от точки A, мы примем в качестве соответствующей точку C', отстоящую на то же расстояние c от точки B. Этим каждой точке отрезка будет отнесена другая точка, отрезок будет отображен на самом себе. Это отображение, это соответствие, может быть также осуществлено движением, если мы повернем отрезок, наложим его на себя другой стороной; каждая точка C упадет при таком движении в соответствующую точку C'.

Заметим при этом следующее. Положим, что некоторое движение совмещает тело A с телом B. Мы всегда можем представить себе неизменяемую среду, неразрывно связанную с телом A и охватывающую все пространство. Движение совмещает каждую точку этой среды с некоторой точкой пространства; мы можем, таким образом, сказать, что движение устанавливает соответствие всего пространства, множества, которое это пространство представляет, с самим собой, отображает его на самом себе. В этом смысле мы всегда будем говорить не о движении тела в пространстве, а о движении всего пространства

в самом себе, об отображении всего множества на самом себе.

Итак, геометрическое движение, т. е. движение, как мы им пользуемся в геометрии, всегда можно рассматривать как отображение всего пространства, всего множества, в котором мы оперируем, на самом себе.

Однако в пространстве существует не одно, а бесчисленное множество движений. Это значит, что каждое тело в пространстве допускает многообразные перемещения, а вместе с тем осуществляются многообразные движения самого пространства, многообразные отображения его на самом себе. Вся эта совокупность отображений обладает некоторыми существенными особенностями. Не останавливаясь на простейших из них, связанных с уточнением самого понятия об отображении (его однозначность и непрерывность), мы укажем только на важнейшую их особенность. Положим, что некоторое движение совмещает тело A с телом B, а затем другое движение совмещает тело B с телом C; в таком случае всегда существует третье движение, которое непосредственно совмещает тело A с телом C. Иными словами, совокупность тех отображений, которые геометрически осуществляют совокупность движений в пространстве, обладает тем свойством, что каждым двум отображениям этой совокупности всегда отвечает третье, заменяющее последовательное выполнение их. Это свойство системы отображений очень часто встречается в математике и помимо движений и обозначается термином: совокупность отображений образует группу. Совокупность движений пространства с геометрической точки зрения составляет группу отображений.

Имея в виду метрическую геометрию, отметим еще одну важную особенность этих отображений. Расстояние между двумя точками при установленной единице меры выражается некоторым арифметическим числом. Если какое-либо движение приводит точки A и B в совмещение с точками A' и B', то расстояние AB должно быть равно расстоянию $A'B'$. С точки зрения учения о группах это выражается следующим образом. Каждым двум точкам пространства отвечает число, остающееся неизменным при всех отображениях группы, — инвариант этой группы. Если возьмем некоторую совокупность точек, то для каждых двух из них этот инвариант — расстояние — имеет оп-

ределенное значение; инвариантной остается и каждая комбинация парных инвариантов, каждая функция от них. Но для данной совокупности точек не существует инварианта, который от парных инвариантов не зависит. Чтобы это выяснить, остановимся на совокупности трех точек; они определяют треугольник, он имеет определенную площадь; это тоже есть инвариант движения. Но хорошо известно, что площадь треугольника выражается через длины его сторон, т. е. через парные инварианты.

Группа движений пространства допускает инвариант двух точек, но не имеет независимого инварианта большего числа точек.

Вместе с тем геометрия, построенная на движении, имеет своим содержанием изучение той группы отображений множества, которые составляют основу его геометрии. Эта точка зрения с полной определенностью, с существенным обобщением, о котором сейчас скажем, была впервые высказана Феликсом Клейном.

В 1872 г. Клейн, вступая на кафедру математики в Эрлангенском политехникуме, произнес программную речь, темой которой служили новые взгляды на сущность геометрии. Эта речь, известная под названием «Эрлангенской программы», сыграла чрезвычайно важную роль в деле установления взглядов на сущность геометрии, в частности — в выяснении того места, которое занимает геометрия Лобачевского.[1]

Сущность взглядов Клейна заключается в следующем.

Чтобы построить геометрию, нужно прежде всего установить то множество, в котором мы геометрию строим, которое служит ее субстратом. Затем нужно установить ту группу отображений этого множества в самом себе, которая собственно геометрию определяет, т. е. отличает ее от всякой другой геометрии, которая в этом же множестве может быть построена. Основное содержание геометрии составляет изучение инвариантов этой группы.

Остановимся теперь на метрической геометрии, допускающей такие движения, что в ней каждая точка может быть совмещена с каждой другой точкой. Группа такой

---

[1] F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872. Русский перевод помещен в «Известиях Казанского физ.-мат. общества» за 1896 г.

геометрии, как мы видели, должна состоять из отображений, по отношению к которым всякие две точки имеют инвариант, а большее число точек независимого инварианта не имеет. Известный норвежский математик, детально разработавший учение о группах непрерывных отображений, Софус Ли, показал, что существуют только три группы, удовлетворяющие этим требованиям, а они приводят к трем геометрическим системам — Евклида, Лобачевского и Римана. Таким образом, возможны только три системы метрической геометрии, основанные на движении. Простейшая из них — старая геометрия Евклида. Лобачевский открыл вторую метрическую геометрию — гиперболическую. Третья — эллиптическая, в двумерной области, на сфере, также была известна еще в древности; Риман показал, что она может существовать также в трехмерном пространстве.

Клейном и Ли установлена точка зрения на геометрию, которая, с одной стороны, выясняет, где коренился источник ее расширения, а с другой — устанавливает и пределы расширения, допускаемые метрической геометрией.

Однако точка зрения Клейна и Ли допускает не только метрическую геометрию. Возможны геометрические системы, оперирующие такими группами, в которых две точки не имеют инварианта; в такой геометрии двум точкам не соответствует расстояние, в нем невозможно измерение, это не метрическая геометрия. Такова группа, на которой строится так называемая *проективная геометрия;* основы ее были заложены Понселе, окончательное же оформление было сделано Штаудтом в середине прошлого столетия. Проективная геометрия получила в настоящем столетии очень широкое развитие, построена даже дифференциальная проективная геометрия широкого охвата. На группе так называемых *конформных* преобразований строится конформная геометрия, дифференциальное развитие которой принадлежит главным образом школе Бляшке.

Остановимся еще на проективной геометрии, которая возвратит нас к интерпретации неевклидовой геометрии в бельтрамиевом круге. В проективной геометрии численный инвариант имеют только четыре точки, и притом расположенные на одной прямой, — это их ангармоническое отношение. Основная характеристика проективных отображений заключается в том, что они всегда отображают прямую прямой же; и обратно, всякое отображение,

которое представляет собой коллинеацию, т. е. в котором отображением прямой всегда служит прямая, есть проективное отображение. Это дает ключ к выяснению метрики в интерпретации геометрии Лобачевского на бельтрамиевом круге.

Каковы те отображения на бельтрамиевом круге, которые соответствуют движениям в гиперболической плоскости? Эти движения, конечно, переводят прямые в прямые; соответствующие отображения на бельтрамиевом круге переводят одни его хорды в другие, т. е. опять-таки переводят прямые в прямые — это должны быть проективные преобразования. С другой стороны, бесконечно удаленные точки гиперболической плоскости при движении никогда не могут перейти в конечные (это собственно означает, что параллельные линии всегда переходят на параллельные же). Соответственно этому на бельтрамиевой карте при каждом отображении, соответствующем гиперболическому движению, граничный круг переходит сам в себя. Таким образом, отображения, которые на бельтрамиевом круге соответствуют гиперболическим движениям, суть проективные преобразования, которые преобразуют окружность этого круга в себя самоё. Эта группа отображений, эта подгруппа всех проективных преобразований плоскости допускают очень простое, очень изящное аналитическое выражение; ее установлением завершается отображение двумерной гиперболической плоскости на евклидовом круге; аналогично проводится отображение гиперболического пространства на шаре.

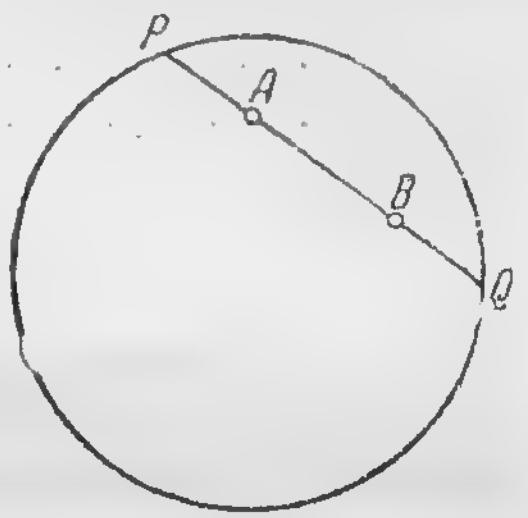


Рис. 50.

Одно обстоятельство способно, однако, вызвать здесь недоумение. Ведь при проективном преобразовании инвариант имеют только четыре коллинеарные точки, а не две; каким же образом здесь, на нашей карте, выплывает расстояние между двумя точками. Это объясняется очень просто. Дело в том, что здесь, на бельтрамиевом круге, любые две точки A и B определяют две другие точки, именно точки P и Q (рис. 50) пересечения прямой с окружностью круга. Этот комплекс четырех точек (AB, PQ), а вместе с тем их ангармоническое отношение впол-

не определяются двумя точками A и B; это ангармоническое отношение представляет собой инвариант рассматриваемых отображений, оно определяет расстояние между точками A и B. Нужно только это ангармоническое отношение надлежащим образом выбрать; необходимо так его нормировать, чтобы было соблюдено свойство аддитивности, которое здесь нужно понимать следующим образом. Если C есть точка, лежащая на прямой AB между точками A и B, то расстояние AB должно равняться сумме расстояний $AC + CB$. Заметим, что этому требованию удовлетворяет следующая функция от ангармонического отношения:

$$(AB) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{PB}{PA} : \frac{QB}{QA} \right). \qquad (52)$$

И она именно принимается за расстояние между точками A и B в этой модели гиперболической плоскости. Читателю может показаться странным такое своеобразное, на первый взгляд сложное, выражение, принимаемое за расстояние между двумя точками. Но внимательно в него всмотревшись, не трудно себе уяснить, что́ к нему привело. Прежде всего ясно, что при этом выборе ангармонического отношения число PB/PA всегда больше единицы, а число QB/QA меньше единицы. Под знаком логарифма всегда стоит положительное число, большее единицы, а поэтому выражение для расстояния всегда имеет положительное значение. Оно обращается в нуль только в том случае, если эти две дроби равны, а это возможно только тогда, когда точка A совпадает с точкой B; в этом — и только в этом — случае расстояние (AB) обращается в нуль. Легко также видеть, что это выражение неограниченно возрастает, когда точка A стремится к P или точка B стремится к Q; точки окружности суть бесконечно удаленные точки плоскости. Наконец, если точка C лежит между A и B, то по той же формуле (52)

$$(AC) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{PC}{PA} : \frac{QC}{QA} \right),$$

$$(CB) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC} \right);$$

и совершенно ясно, что

$$(AB) = (AC) + (CB),$$

требование аддитивности выполняется.

Отображение гиперболической плоскости на евклидовом (бельтрамиевом) круге выполнено совершенно безукоризненно; двумерная гиперболическая геометрия осуществляется здесь полностью. Совершенно аналогично выполняется отображение гиперболического пространства внутри евклидовой сферы. Всякое противоречие в гиперболической геометрии вызвало бы такое же противоречие в геометрии Евклида. Поэтому гиперболическая геометрия логически столь же правильна, столь же непротиворечива, что и классическая геометрия Евклида.

Таким образом, к тому времени, как исполнилось сто лет со дня рождения Лобачевского, сомнений в логической правильности, в непротиворечивости созданной им геометрии, можно сказать, уже не было. Задача, которая стояла перед Лобачевским всю его жизнь, была окончательно разрешена. Исследования же, которые привели к этому решению, выдвинули ряд глубоких идей, установили совершенно новый взгляд на геометрию, определили широкую ее эволюцию.

Первая, может быть, важнейшая из этих идей заключалась в том, что геометрия свойственна не только пространству в том смысле, как его всегда понимали. Совершенно так же, как для выражения соотношений между пространственными образами была построена классическая геометрия, можно строить геометрию, — вернее, геометрии, — для различных многообразий (множеств); каждая такая геометрия выражает соотношения, имеющие место в том множестве, для которого она построена. Общее название «геометрии» они носят потому, что в своем строении в некоторой мере сохраняют общую схему, общий облик, унаследованный от классической геометрии; но по существу эти геометрии могут быть очень различны, как различны множества, составляющие их субстрат, и соотношения, которые в них имеют место.

Вторая, тесно с этим связанная идея, заключается в том, что одна и та же геометрия может получать применение, может осуществляться не только в одном, но и в различных множествах; эти множества называются различными интерпретациями этой геометрии.

Существование конкретной интерпретации, в которой геометрическая система выполнена, устанавливает ее непротиворечивость. Попытки применять геометрию не к тому множеству, к которому она приспособлена, в кото-

ром она осуществляется, а к другому, существенно от него отличному, естественно приведет к нелепости. Именно этого рода видимая нелепость стояла на пути усвоения геометрии Лобачевского.

Геометрия может быть, таким образом, многообразна. Построение геометрии требует прежде всего установления множества, которое служит ее субстратом. Дальнейший путь может быть двоякий. Можно установить группу отображений или преобразований этого множества, которой определяется его геометрия; это установка Клейна и Ли. Можно определить мероопределение множеств метрической квадратичной формой — это точка зрения Римана. В весьма замечательной работе Гельмгольца можно усмотреть связь, которая эти точки зрения соединяет.[1]

По этим путям быстрыми шагами пошла эволюция геометрии. Эта эволюция заключалась в установлении новых разновидностей уже известных геометрических систем, в расширении содержания каждой геометрии, разыскании новых интерпретаций этих геометрий, развитии геометрий различных групп преобразований, построении общей теории римановой геометрии. Но и на этих замыслах эволюция геометрии отнюдь не остановилась. Мы не имеем возможности описать здесь дальнейшие пути, по которым она шла; отсылая читателя к специальным сочинениям, сюда относящимся,[2] мы только еще раз подчеркнем, что все это обилие идей и фактов имело своим источником творения Лобачевского. Они имели и другие далеко идущие результаты, которым посвящена заключительная глава.

К столетию со дня рождения Лобачевского его имя было у всех на устах, пользовалось признанием и самой почетной известностью. В 1893 г. Казанским университетом и Казанским физико-математическим обществом было организовано празднование столетнего юбилея со дня рождения Лобачевского. На это торжество откликнулись ученые и научные учреждения всего мира.[3] Затем (в 1895 г.) Казанским физико-математическим обществом была учреждена премия имени Н. И. Лобачевского для уве-

---

[1] H. Helmholtz. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen. Gel. Nachrichten, *14*, 1888.

[2] I. A. Schouten und D. Dantzig. Was ist Geometrie? Труды семинара по векторному и тензорному анализу, II—III М.—Л., 1935.

[3] «Празднование Казанским университетом столетней годовщины со дня рождения Н. И. Лобачевского». Казань, 1894.

ковечения его имени. Капитал для этого (6000 руб. золотом) был собран по подписке, в которой участвовали ученые всего мира. Присуждение премии (по 500 руб. каждая) должно было происходить через каждые три года; но после пятого конкурса первая мировая война нарушила эти сроки. На премию представили свои работы самые выдающиеся геометры мира. Первым лауреатом (1896) был Софус Ли. Последний (довоенный) конкурс состоялся в 1937 г. На этот раз Общество располагало тремя премиями: международной премией в 1000 руб. и двумя премиями для советских молодых ученых по 500 руб. каждая. Согласно распоряжению Народного комиссариата просвещения Общество предложило молодым ученым для получения премии две темы, связанные с развитием неевклидовой геометрии. Международная премия была присуждена члену Парижской Академии наук Эли Картану, а обе советские премии получил профессор Саратовского университета В. В. Вагнер. [1]

XXVI. Обоснование геометрии

(К 125-летию со дня рождения Лобачевского)

Возвратимся теперь к тому основному вопросу, который привел Лобачевского к неевклидовой геометрии, к теории параллельных линий, к V постулату Евклида. После того как исчезли сомнения относительно логической правильности, непротиворечивости геометрии Лобачевского, вопрос о доказательстве постулата о параллельных также никаких сомнений вызывать уже не мог. В самом деле, если геометрия Лобачевского логически так же правильна, как и геометрия Евклида, то это означает, что с остальными постулатами Евклида одинаково совместны как V постулат, так и противоположное ему допущение. Иначе говоря, ни V постулат Евклида, ни постулат Лобачевского не представляют собой следствия из остальных постулатов, ни тот, ни другой не могут быть доказаны; приобщая к остальным постулатам V постулат, мы получаем геометрию Евклида (параболическую геометрию), а приобщая постулат Лобачевского, мы получаем создан-

[1] Отчеты по присуждению премий публиковались в «Известиях Казанского физико-математического общества» и выпускались отдельными изданиями в 1898, 1901, 1904, 1907, 1910, 1914, 1937 гг.

нную им (гиперболическую) геометрию. Чтобы получить геометрию Римана (в узком смысле этого слова, эллиптическую геометрию), приходится внести еще и другие изменения во всю аксиоматику Евклида.

Существенное значение здесь имело не только то, что получил, наконец, разрешение вопрос, свыше двух тысяч лет тяготевший над человеческой мыслью; наиболее важным было то, что сложилось ясное представление о независимости одних положений от других. Если мы имеем ряд суждений (S, P, Q, R,...) и одно из них, скажем S, не зависит от остальных, то это означает, что оно не представляет собой следствия остальных, что с ними совместимо как суждение S, так и противоположное ему суждение.

Обозначим через $\sum$ совокупность суждений P, Q, R,..., через $\overline{S}$ — суждение, противоположное суждению S. Если мы обнаружим, что с совокупностью суждений $\sum$ совместны как суждение S, так и $\overline{S}$, то отсюда будет следовать, что ни S, ни $\overline{S}$ не есть следствие суждений $\sum$ Какими же средствами такая независимость может быть установлена? Для этого нужно показать, во-первых, что существует такая совокупность объектов, такое множество, в котором совместно осуществляются суждения S и $\sum$, в котором при надлежащем истолковании входящих в эти суждения терминов (понятий) имеет место (оправдывается, осуществляется) совокупность суждений (S. $\sum$); во-вторых, нужно показать, что в то же время существует и такое множество, в котором совместно осуществляются суждения $\overline{S}$ и $\sum$. Отсюда — следующая установка в деле построения той или иной выводной (дедуктивной) науки, в частности математической дисциплины. В основе каждой математической дисциплины должна лежать определенная аксиоматика, т. е. ряд суждений, связывающих те основные понятия, которыми эта дисциплина оперирует. Эти суждения, во-первых, не должны содержать противоречия, должны быть «непротиворечивы», а во-вторых, должны быть независимы. Это налагает прежде всего требования и на самые исходные понятия; они не должны быть связаны с какими-либо совершенно определенными объектами или представлениями; они должны допускать, как говорят, различные интерпретации или различные формы осуществления. Для

того чтобы обнаружить непротиворечивость принятой системы суждений, нужно показать, что реально существует такая система объектов (такое множество), в которой все эти суждения при надлежащем истолковании входящих в них терминов оказываются справедливыми, выполняются те требования (постулаты), которые к ним этими суждениями предъявляются. Чтобы доказать независимость всей системы суждений, нужно обнаружить тем способом, который указан выше, что ни одно из этих суждений не представляет собой следствия остальных. Так, например, чтобы построить систему постулатов, из которых может быть строго логически выведена геометрия, нужно прежде всего установить ее исходные понятия, и притом так, чтобы они допускали различные формы истолкования. Затем надо показать существование множества, в котором все эти постулаты, выполняются. Далее, если этих постулатов, скажем, десять, то необходимо указать еще десять множеств, каждое из которых приспособлено для доказательства независимости одного из постулатов; в таком множестве должны выполняться девять постулатов, а один — тот, независимость которого доказывается, — в этом множестве должен не выполняться.

Первые попытки такого обоснования геометрии возникают в 90-х годах прошлого столетия и принадлежат главным образом итальянскому геометру Пеано и его ученикам Амодео, Фано, Пьери и другим.[1] Частично такая попытка, впрочем, проводится уже в работе Паша, относящейся к 1882 г.[2] Однако твердо стал на этот путь известный германский ученый Д. Гильберт. В 1899 г., в связи с открытием в Гёттингене памятника Гауссу и Вебер у, был выпущен сборник, содержавший две статьи, одна из которых принадлежала Гильберту и носила название «Основания геометрии».[3] Первая глава этого сочинения содержит перечень постулатов, на которых строится евклидова геометрия; в ней даются также указания, как из этих постулатов геометрия развертывается. Вторая глава посвящена доказательству непротиворечивости и независимости установленных аксиом.

---

[1] G. Peano. I principii di geometria logicamente esposti. Torino 1889.

[2] M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882.

[3] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen. Leipzig, 1899.

Система Гильберта вызвала немало возражений, многие из которых он сам признал справедливыми. Это видно уже из того, что почти каждое из последующих изданий (их по настоящее время появилось семь, последнее выпущено в 1930 г.) содержит значительные изменения в предложенной им системе, именно и вызванные сделанными указаниями. Для доказательства независимости постулата Гильберт следует тому пути, который был указан Лобачевским: он строит пространства, в которых выполняются все постулаты, кроме одного — именно того, независимость которого он хочет доказать. Можно ли считать систему, предложенную Гильбертом, вполне удовлетворяющей формулированным выше требованиям? Этого несомненно утверждать нельзя. В связи с работой Гильберта возникла целая дискуссионная литература, выяснившая, что самая постановка общего вопроса о независимости системы суждений еще нуждается в существенном уточнении. Несомненно, однако, что система Гильберта в общей своей структуре уже приближается к решению этой задачи, освобождению геометрии от тех «темных понятий, на которых, — по словам Лобачевского, — повторяя Евклида, строим мы геометрию». Лобачевский освободил геометрию Евклида от одного из «темных пятен», на ней лежавших, заполнил «пробел в теории параллельных линий». По его пути пошли в этом многие другие геометры, внесли ясность в обоснование геометрии, заполнили различные другие пробелы. Но до конца эту задачу нельзя еще считать разрешенной до настоящего времени. В чем же заключается причина того, что решение этой задачи так задержалось? Она коренится в двух обстоятельствах. Во-первых, в сложности самой задачи. Геометрия — это большое построение, подвести под которое прочный, безукоризненный фундамент очень трудно. Число постулатов, для этого необходимых, значительно; выбрать их так, чтобы ни одно из формулированных выше требований не нарушалось, — задача очень сложная. Второе обстоятельство коренится в том, что самую независимость постулатов во всей их совокупности можно понимать различно. Нужно еще установить общую точку зрения на этот вопрос; это требует еще углубленной работы мысли в области логики.

Эпоха, в течение которой на базе учения Лобачевского если еще не окончательно сложилось, то во всяком слу-

чае созрело современное учение об обосновании геометрии, падает главным образом на четверть века, следовавшую за юбилеем, описанием которого мы закончили предыдущую главу.

Но задача строгого логического обоснования возникла не только в геометрии, но и в других математических науках, — в частности, например, в различных алгебраических дисциплинах в их современной структуре. Очень важно то обстоятельство, что здесь аксиоматика всегда гораздо проще, чем в геометрии, и потому требование безукоризненного обоснования здесь несомненно ближе к осуществлению; в некоторых дисциплинах оно осуществлено полностью.[1]

Методы обоснования всякой математической дисциплины, — больше того, методы обоснования всякой выводной науки в современной своей постановке ведут свое начало от замысла, от идей Лобачевского. На такое дедуктивное построение в настоящее время прежде всего претендуют механика и теоретическая физика. И в эти дисциплины идеи Лобачевского глубоко проникли в различных своих разветвлениях; Лобачевский это предусмотрел.

XXVII. Приложения неевклидовой геометрии к механике, физике и космологии

(К 150-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского)

В заключительной части мемуара «О началах геометрии» Лобачевский говорит: «Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой геометрии в механику, и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе вещей, но которые принудят нас ограничивать или совсем не допускать зависимости линий и углов». Смысл этого замечания заключается в том, что противопоказания по отношению к неевклидовой геометрии могут обнаружиться не в логических концепциях геометрии, а в механике, точнее — в механическом эксперименте; может оказаться,

[1] Я считаю, например, систему постулатов, предложенную покойным С. О. Шатуновским для установления понятия о величине, совершенно безукоризненной (С. О. Шатуновский. О постулатах, лежащих в основании понятия о величине. Одесса, 1920).

что к противоречию приводит не новая геометрия в ее логическом развитии, а расхождение между нею и механикой. Речь идет, таким образом, не о противоречивости неевклидовой геометрии, а о том, может ли она получить применение в механике, — там, где такое применение получила геометрия Евклида. Но Лобачевский делает отсюда правильный вывод, что такого рода факты не могут привести к опровержению неевклидовой геометрии, а потребуют изменения в самой механике.

«Однакож можно предвидеть, — замечает Лобачевский там же, — что перемены в механике при новых началах геометрии будут того же рода, как показал Лаплас (Mécanique célèste, t. I, liv. I, ch. II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы или, выразимся вернее, предполагая силы, измеряемые всегда скоростью, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их».

Совершенно естественно, что классическая механика, которая с геометрией неразрывно связана уже с первых же своих шагов, не укладывается в рамки новой геометрии. Так, например, поступательное движение твердого тела, как оно имеет место в предположении евклидовой геометрии, не может происходить в пространстве Лобачевского.

В самом деле, поступательное прямолинейное движение в классической механике характеризуется тем, что все точки тела описывают равные и параллельные прямолинейные пути. Между тем, если точка A твердого тела движется по прямой AB, то никакая другая точка M не может описывать прямой линии. В самом деле, точка M при этом должна оставаться на том же расстоянии от AB, а геометрическое место точек, отстоящих на данное расстояние от неподвижной прямой, в гиперболической плоскости не представляет собой прямой линии. Изменение геометрии неизбежно влечет за собой изменение механики уже на первых ее шагах, в кинематике. Это было очень скоро усмотрено, и уже в конце прошлого века вызвало работы, посвященные механике неевклидова пространства.

Уже в 1879 г. де-Тилли указал на простейшие модификации, которые признание неевклидовой геометрии должно внести в кинематику,[1] он, однако, стоял еще на той точке

[1] T. M. de T i l l y. Essai sur les principes fondamentaux de la géometrie et de la mécanique. Mem. Soc. sc. phys. nat. (2), *3*, Bordeaux, 1—190, 1879.

зрения, что это должно привести к опровержению геометрии Лобачевского.

Но вслед за этим Болл фактически развернул всю кинематику гиперболического пространства, отнюдь не склоняясь при этом к отрицанию неевклидовой геометрии. Укажем только последнюю из его работ, помещенную в 1883 г. в XV томе Британской энциклопедии под словом «Измерение» (Measurement). За кинематикой естественно последовала и неевклидова динамика, построенная главным образом Киллингом, тем же Боллом, Либманом и, можно сказать, завершенная А. П. Котельниковым.[1] Последний показал, что для построения механики неевклидова пространства наиболее целесообразно построить специальную теорию векторов, другую теорию комплексных чисел. Геометрия Лобачевского проникла, таким образом, в теорию векторов и в учение о комплексных числах. В Казани, где была создана неевклидова геометрия, была приведена к завершению и неевклидова механика. Но все эти сочинения представляли собой в ту пору совершенно абстрактные исследования. Это были непротиворечивые системы, чрезвычайно своеобразные, поскольку они вытекали из иных принципов, нежели классическая механика; они уже не вызывали сомнений, но конкретного применения они еще не имели.

В 1905 г. появился первый мемуар Эйнштейна, положивший начало учению, известному в настоящее время под названием «теории относительности», — точнее, специальной теории относительности. Всплыл старый спор о том, можно ли говорить об абсолютном движении, об исключительной среде, по отношению к которой действуют закон инерции и закон всемирного тяготения. Вопрос этот имеет очень продолжительную историю. Но чрезвычайно утонченные средства измерения, достигнутые в последнее время, и результаты этих измерений поставили этот вопрос с особенной остротой.[2] Мы не имеем возможности входить в сколько-нибудь обстоятельное изложение этого учения; но и совершенно его обойти мы не можем.

---

[1] А. П. Котельников. Проективная теория векторов. Казань, 1929. В этом сочинении дана обстоятельная библиография сочинений, посвященных механике неевклидова пространства.

[2] История вопроса, доведенная до начала текущего столетия, хорошо изложена в небольшой книге L. Lange. Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes. Leipzig, 1886.

Если каждая точка M среды $\mathfrak{M}$ с течением времени совпадает с точками M' (вообще различными) среды $\mathfrak{M}'$, то мы говорим, что среда $\mathfrak{M}$ *движется относительно среды* $\mathfrak{M}'$. Самое это определение при каждом движении необходимо предусматривает среду, относительно которой это движение происходит. Издавна «релятивисты» утверждали, что никак иначе движение понимать невозможно, что всякое движение неизбежно по самому своему значению, имеет относительный характер. Тело (и связанная с ним неизменяемая среда) может находиться в движении относительно одной среды и в то же время в покое относительно другой среды; оно может совершать равномерное движение относительно одной среды и неравномерное относительно другой. Во всякий момент движения каждая точка M среды $\mathfrak{M}$ совпадает с некоторой точкой M' среды $\mathfrak{M}'$; но в такой же мере во всякий момент каждая точка среды $\mathfrak{M}'$ совпадает с некоторой точкой среды $\mathfrak{M}$; можно с одинаковым правом говорить о движении среды $\mathfrak{M}$ относительно среды $\mathfrak{M}'$, как и о движении среды $\mathfrak{M}'$ относительно среды $\mathfrak{M}$. Каждая точка одной среды при движении вычерчивает определенную траекторию в другой среде, имеет *относительно нее* определенную скорость, определенное ускорение; не имеет никакого смысла говорить о движении, о скорости, об ускорении точки, не указывая, относительно какой среды происходит движение, к какой среде мы относим скорость, ускорение, другие элементы и понятия, связанные с движением. Такова была точка зрения релятивистов. К числу их нужно относить Декарта и его школу, хотя вполне выдержанным в этом смысле его учение о движении считать нельзя.

В противоположность релятивистам их противники — абсолютисты — утверждали, что можно говорить о покое или движении тела без указания «среды референции», т. е. той среды, к которой мы относим движение, что каждое из двух утверждений — «тело находится в покое», «тело движется» — имеет содержание само по себе, что существует как абсолютный покой, так и абсолютное движение. Решительным защитником этой точки зрения был Ньютон, — это было связано со всей его системой механики, с системой мира. В самом деле, закон инерции гласит, что материальная точка, не подверженная действию никакой силы, совершает равномерное прямолинейное движение. По отношению к какой среде происходит это прямо-

линейное равномерное движение? По отношению к какой среде действует закон всемирного тяготения? Ньютон считает такой средой *пространство,* в котором мы живем; по отношению к пространству происходит абсолютное движение, законы которого им установлены; по отношению к пространству действует закон всемирного тяготения. Но в пространство, лишенное материального субстрата, нельзя конкретно вложить осей координат, т. е. установить их таким образом, чтобы по отношению к ним было возможно производить измерения, ориентировать положение материального тела.

Поиски особенной среды, по отношению к которой действует классическая механика, ни к каким результатам не привели: ни эфир, материально заполняющий пространство, ни сфера неподвижных звезд, ни одна из тех средин, которым эту роль пытались приписать, не удовлетворяют тем требованиям, которые механика предъявляла к абсолютной среде референции, к среде инерции. Оставалось признать, что такой среды не существует, что механика должна быть построена так, чтобы она ни в какой исключительной среде не нуждалась; и с такой установкой должна быть сообразована теория всех физических явлений. На этот путь стал Альберт Эйнштейн. К этому требованию механики он, однако, присоединил еще другое, чисто физическое, которое диктовалось результатами измерений, относящихся к скорости распространения света. Известные опыты Майкельсона и Морлея, повторенные и продолженные другими экспериментаторами, установили, что скорость распространения света в пустом пространстве остается одной и той же для всех наблюдателей, независимо от того, какое движение они совершают друг относительно друга и относительно источника света. Коснемся этого вопроса несколько подробнее. Представим себе две среды — I и II, совершающие одна относительно другой равномерное движение: в ту и другую среду проникают лучи света, исходящего из одного источника; наблюдатели, один из которых находится в среде I, другой в среде II, измеряют скорость распространения этого светового излучения, каждый в своей среде. Упомянутые выше измерения дали один и тот же результат, оба наблюдателя получают одно и то же значение скорости света. Если рассматривать распространение света как движение несущейся частицы, то этот факт не согласуется с основами

классической механики; совершенно ясно, что в простейшем случае, когда среда, в которой происходит распространение света, движется относительно его источника, скорость света должна оказаться больше, если наблюдатель движется навстречу источнику, и меньше при движении в противоположную сторону. Кинематика, которую строил Эйнштейн, должна была учитывать этот факт, должна была быть согласована с результатами опытов, устанавливающих постоянство скорости распространения света. Если бы наблюдатель, переходя в некоторый момент из одной среды в другую, сохранял то же измерение пространства и времени, т. е. измерение отрезков и промежутков времени давало бы при этом те же результаты, то результаты Майкельсона и Морлея были бы невозможны; устанавливаемый ими факт находился бы в противоречии с классической геометрией и со связанной с ним кинематикой. Теория, которую Эйнштейн построил, чтобы это противоречие преодолеть, чтобы его устранить, исходит из того, что с переходом наблюдателя из среды I в среду II происходит изменение в измерении длины и времени. Несколько подробнее: если наблюдатель, находящийся в среде I, в некоторый момент перейдет в среду II, захватив с собой масштаб для измерения длин и часы для измерения времени, то при этом изменится масштаб, и притом различно, в зависимости от того, в какую сторону он направится (в сторону движения, или перпендикулярно, или наклонно к нему); изменится также и ход часов. Результаты измерений, производимых в одной и другой среде, будут различны. Положим, что в некоторый момент T с точкой A среды I совпадает точка A' среды II; в некоторый момент T' с точкой B среды I совпадает точка B' среды II. Естественно считать, что отрезок AB среды I отпечатлелся на отрезке $A'B'$ среды II. Между тем результаты измерения отрезков AB в среде I и $A'B'$ в среде II будут различны, потому что измерение производится различными масштабами; различны будут также результаты измерения промежутка времени TT' в одной и другой среде, потому что измерение производится часами различного хода.

Эти факты, очерченные здесь, так сказать, качественно, получают строго количественное выражение; строится учение о движении, согласованное с инвариантностью скорости света. Все процессы — кинематические, динами-

ческие, физические, происходящие в одной среде, отпечатлеваются, модифицируются в другой среде таким образом, что никакая среда не имеет преимущественного значения. Вся теория изучает только движение одной среды относительно другой; та же модификация механических и физических процессов, которая происходит при переходе из одной среды в другую, зависит от скорости относительного движения этих средин.

Это учение носит название специальной теории относительности. Изложить здесь обстоятельное ее математическое содержание, конечно, невозможно. Общая характеристика этой теории допускает различное выражение; наиболее простое ее выражение может быть сформулировано следующим образом. Каждая из средин, совершающих одна относительно другой равномерное движение, имеет другую геометрию; переход из одной среды в другую, влечет за собой модификацию геометрии; одна геометрия отличается от другой значением параметра, которым служит отношение v/c (скорости относительного движения к скорости света). Четко выплывает таким образом идея Лобачевского о различных разновидностях геометрии, которые отличаются одна от другой значением параметра.

Преемственность математических учений заключается не только в том, что одно исчисление непосредственно возникает из другого; вряд ли не бóльшую роль играет то обстоятельство, что одни идеи возникают из других, получают осуществление по схеме уже сложившихся учений. Вся установка Эйнштейна была бы невозможна, если бы ей не предшествовало создание неевклидовой геометрии. Но и чисто математическая, формально аналитическая сторона дела тесно связана с геометрией Лобачевского.

Оставаясь при прежних двух средах I и II, совершающих равномерное движение одна относительно другой, представим себе материальную точку M, совершающую движение, которое может быть отнесено как к одной, так и к другой среде. Установив в обеих срединах оси ортогональных декартовых координат, обозначим через X, Y, Z компоненты скорости этой точки относительно среды I, через X', Y', Z' ее компоненты относительно среды II. Одна из главных задач теории относительности, — можно сказать, одна из главных задач Эйнштейна в ее разрешении, заключалась в том, чтобы установить уравне-

ния, выражающие X', Y', Z', через X, Y, Z, выражающие преобразования вектора скорости при переходе от одной системы референций к другой. Эти уравнения (так называемые лоренцовы преобразования) *в точности совпадают с уравнениями движения в гиперболическом пространстве*. Обнаружена новая интерпретация гиперболической геометрии, теперь в физической теории.

Один из основных результатов теории относительности заключается в том, что скорость движущегося тела не может превзойти скорости света c. Как можно себе это уяснить? Если представим себе точку, движущуюся со скоростью, превышающей $\frac{1}{2}c$ относительно среды I, и если при этом среда I движется в том же направлении, относительно среды II, со скоростью, превышающей $\frac{1}{2}c$, то казалось бы ясным, что скорость той же точки относительно среды II превышает c, между тем она оказывается меньше c. Разгадка заключается в том, что закон сложения скоростей не тот, который имеет место в классической механике. Закон параллелограма скоростей и сил заменяется другим, который приводит к тому, что две скорости, превышающие каждая $\frac{1}{2}c$, дают результирующую, меньшую c. Если не самый закон сложения, то факт его модификации, тот факт, что закон сложения скоростей и сил должен быть изменен, должен быть заменен другим, в точности осуществляет то, что предусмотрено Лобачевским в приведенных выше заключительных словах мемуара «О началах геометрии».

Все построение специальной теории относительности получило чрезвычайно удачное выражение в замечательной схеме, установленной Минковским.[1]

Отнесем некоторую среду к ортогональной декартовой системе координат; пусть x, y, z будут координаты произвольной ее точки M, t — показание часов в этой точке в некоторый момент времени. Совокупность всех точек среды в пространстве и во времени составляет четырехмерное множество, о котором мы уже говорили выше; его часто называют «миром Минковского», а каждый его элемент x, y, z, t — «мировым моментом». Изменение системы координат (в том числе начала отсчета

[1] H. Minkowski. Raum und Zeit. Leipzig, 1909. Мемуар много раз переиздавался, переведен на все европейские языки; русский перевод можно найти в сборнике: Лоренц, Эйнштейн, Минковский. Теория относительности, Москва, 1935.

времени и единицы его измерения) ведет к замене координат каждого элемента этого множества x, y, z, t другими значениями x', y', z', t', ведет к отображению этого множества в самом себе или к его преобразованию. Уравнения этого преобразования можно рассматривать также как уравнения движения среды $(x', y', z', t',)$ относительно среды (x, y, z, t). Это нужно понимать так. Представим себе среду II, совершающую равномерное движение относительно среды I; пусть попрежнему x, y, z, t будут координаты произвольной точки M среды I и показание часов в ней в момент T; пусть x', y', z', t' суть координаты и показание часов в среде II в той ее точке M', которая в этот момент T совпадает с M. Те же уравнения преобразования координат выражают $x' y', z', t'$ через x, y, z, t, выражают движения среды II относительно среды I. Мы имеем, таким образом, множество и группу преобразований в ней, на базе которой, как выяснено выше, может быть построена геометрия. Это и есть чисто геометрическое выражение специальной теории относительности; и именно это ее выражение было принято как наиболее целесообразное средство построения и развития этой теории. Часто говорят, что специальная теория относительности есть геометрия четырехмерного мира Минковского. Самая эта терминология — четырехмерный мир, четырехмерное пространство — вызвала немало недоумений, нередко сопоставлялась с идеалистическим и просто нелепым представлением о четырехмерном пространстве мистиков, с которым оно совершенно ничего общего не имеет. Мир в пространстве и времени рассматривается как четырехмерное множество, — это совершенно определенная, конкретная математическая идея, столь же далекая от всего мистического, как и классическая геометрия.

Как же получает здесь математическое выражение основное положение специальной теории относительности — постоянство скорости света, превышающей скорость всякого другого движения? Представим себе два мировых момента $(x, y, z, t$ и $x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, бесконечно близкие в пространстве и времени. Существует такое постоянное число c, при котором квадратичная форма

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (53)$$

сохраняет одно и то же положительное значение при переходе к другой системе таких же координат при равномерном движении многообразия в самом себе. Выражение (53) остается инвариантным относительно той группы преобразований, на базе которой построена геометрия мира Минковского. Это есть линейный элемент (вернее, квадрат его, ds^2), определяющий ту же геометрию с точки зрения Римана. Весь тот сложный комплекс идей, к которому привел в своем развитии замысел Лобачевского, получил применение, осуществление здесь, в основной теории современной физики.

Специальная теория относительности получила признание, вошла в обиход современной физики. Английское название «restrict relativity» (ограниченная теория относительности) лучше характеризует существо вопроса. Это ограниченная теория; она рассматривает только кинематические и кинетические явления, она геометрически описывает мир в его движениях; но она сама по себе не учитывает ни гравитационных, ни электромагнитных явлечий, которые являются по отношению к ней внешними агентами, ею по существу не предусмотренными. В 1915 г. Эйнштейн опубликовал новый мемуар, носящий название «Основы общей теории относительности».[1] Здесь задача поставлена шире — построить геометрию того же четырехмерного мира, которая описывала бы также явления, зависящие от гравитации. Ясно, что теория должна быть более общая, она исходит из общего замысла Римана, именно она в качестве квадрата линейного элемента принимает не простое выражение (53), а более сложную форму

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

от четырех переменных x^1, x^2, x^3, x^4. Если оставить коэффициенты g_{ij} совершенно произвольными функциями от x^1, x^2, x^3, x^4, то мы будем иметь общую геометрию Римана четырехмерного множества. Задача заключается в том, чтобы надлежащим образом ограничить возможный здесь выбор этих функций, — именно, этот выбор нужно сделать так, чтобы построенная на базе элемента (54) риманова геометрия могла действительно служить для та-

[1] A. Einstein. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Physik, *49*. Мемуар переиздавался много раз, его русский перевод можно найти в сборнике, указанном выше.

кого математического описания мира Минковского. Этот аппарат должен охватывать гравитационные явления в самом себе, он должен описывать физическое состояние мира материальных точек, учитывая в каждый момент все гравитационные явления. Решение этой задачи в такой ее общности все еще остается недоступным; но при ряде упрощенных допущений в ограниченном участке мироздания можно дать этому замыслу такое осуществление, при котором он достигает цели. Формулированное выше требование можно считать выполненным. Геометрия глубже проникла в недра физики; энтузиасты говорили даже о «геометризации физики». Конечно, это преувеличение, обычно сопровождающее увлечение новыми идеями. Но несомненно роль геометрии в области точного знания чрезвычайно возросла; она служит ему более мощными средствами, развившимися на базе идей Лобачевского.

Роль Лобачевского здесь имеет троякий характер.

Во-первых, самый отказ от традиционной механики, от утвердившихся понятий о пространстве и времени был принят сравнительно легко именно благодаря тому, что борьба за новую геометрию, — борьба, с которой был связан отказ от установившихся пространственных представлений, была уже позади. Это был уже пройденный этап, завоеванная позиция. Учения о пространстве и времени в такой мере тесно, неразрывно связаны между собой, что признание новой механики уже представлялось естественным — не всеми, конечно, как не все и в настоящее время усвоили идеи неевклидовой геометрии. Как Больцани считал, что «Пангеометрия» есть бред умалишенного, так некоторым физикам казалось, что физики, признающие учение Эйнштейна, — умалишенные. Но все же тех препятствий, которые встретил Лобачевский, Эйнштейн уже на своем пути не имел. И не подлежит никакому сомнению, что перед ним стоял в этом творении облик Лобачевского и сотворенная им, уже признанная неевклидова геометрия.

Во-вторых, самая идея построить общую механику, уравнения и формулы которой зависят от параметра (v/c), которая возвращает нас к классической механике при весьма малых значениях этого параметра, так что классическая механика является простейшим, предельным ее частным случаем, — ведь это явно основная, важнейшая идея Лобачевского, перенесенная из геометрии в более

обширную область теоретической физики. В прежние столетия физические гипотезы сменяли друг друга, сметая одна другую. Когда факты становились в противоречие с принятой ранее гипотезой, ее отбрасывали, ее заменяли другой, нередко прямо противоположной ей. В настоящее время такой отказ от установившейся теории во многих разделах науки уже отошел в прошлое. Когда точные исследования обнаруживают, что принятая, установившаяся теория неудовлетворительна, строится более общая теория, математическое выражение которой зависит от одного или нескольких параметров (численных или функциональных). При некоторых предельных значениях параметров обобщенная теория возвращается к прежней, которая, таким образом, оказывается частным, обыкновенно простейшим ее случаем. Эволюция идет уже не в порядке разрушения старых теорий, а в порядке их обобщения, в порядке их развития. Весь этот замысел идет из геометрии, из учения об обосновании геометрии, идет от Лобачевского.

Наконец, неевклидова геометрия в различных формах ее осуществления — то в виде геометрии Лобачевского, то в виде геометрии Римана в узком или широком значении этого слова, непосредственно внедрилась в существо новой механики и теоретической физики, получила здесь конкретное применение; она вышла из области абстракции, она сделалась новым звеном в области современного естествознания. Она проникла и в учение о строении мироздания — в космологию.

Космология, как учение о происхождении и современном состоянии мироздания, может быть рассматриваема как самая древняя из наук. Относящиеся к ней вопросы обсуждались в глубочайшей древности и если даже приводили первоначально к очень наивным заключениям, то все же всегда занимали умы. В течение тысячелетий естествоиспытатели не оставляли этих вопросов, как математики не оставляли вопроса об основаниях геометрии. И все же нужно сказать, что космология находится еще в начальной стадии своего развития.

Трудности, стоящие на пути ее продвижения, коренятся главным образом в том, что наши сведения о состоянии космоса, о его размерах, о происходящих в нем движе-

ниях, действующих в нем силах, о совершающихся в нем явлениях очень ограничены. Более или менее конкретные сведения о мироздании ведут свое начало главным образом с эпохи Гершеля (первая половина XIX в.). И не случайно, считает Цернер, эпоха возникновения новых представлений о вселенной, новых сведений о ее размерах и строении совпадает с той эпохой, когда зарождались идеи неевклидовой геометрии, новые взгляды на геометрию; между той и другой наукой существует тесная связь.

Столетие, в течение которого создалась и развернулась неевклидова геометрия, было также веком, в течение которого глубоко изменились, расширились наши сведения о мироздании. В настоящее время не подлежит сомнению, что наша галактика — скопление звезд, составляющих млечный путь и содержащее в своем составе наше солнце, — есть одно из огромного множества таких же образований. Число галактик, доступных нашему наблюдению, по вычислениям Хёбля (Hubbl) достигает 10^8. А между тем наши наблюдения ограничены тем, что может быть воспринято нашими телескопами; наибольший из них — стодюймовый рефрактор на горе Mount-Wilson охватывает, правда, огромное расстояние порядка $3\ 10^8$ световых годов, но все же не проникает дальше. И если скудны наши сведения о том, что происходит в этих пределах, то для нас остается совершенно неизвестным, что́ имеет место за этими пределами. Но и вопрос о том, как распределена материя в этих пределах, далеко не выяснен. Очень проблематичны данные о массах, содержащихся в каждой галактике, об их радиальных перемещениях, о темной материи, распространенной в мироздании. Есть все основания считать, что количество темного вещества — угасших светил — во много раз превосходит массу светоизлучающей материи. Закон всемирного тяготения Ньютона хорошо согласуется с явлениями, происходящими в солнечной системе. Наблюдения двойных звезд дают основание судить о тяготении в мировом пространстве. Но сведения эти очень ограничены; прежде всего мы не знаем, какова средняя плотность вещества, распространенного в мироздании. Мы не в состоянии на этот вопрос ответить. При его решении мы вынуждены оперировать только очень гадательными цифрами.

Несмотря на этот скудный материал, в течение текущего

столетия произведены очень обширные исследования (Эйнштейн, де-Ситтер, Зеелигер, Эддингтон) теоретического и экспериментального свойства. Мы не можем здесь излагать сколько-нибудь обстоятельно эти исследования, потому что они выходят далеко за пределы как настоящего сочинения, так и компетентности его автора. Мы ограничимся только немногими указаниями, непосредственно относящимися к роли неевклидовой геометрии в этих исследованиях.

Центральным пунктом в этом отношении является вопрос о значении средней плотности вещества в мироздании.

Очень тщательные математические исследования, выполненные Зеелигером, с одной стороны, и де-Ситтером, Эйнштейном и Эддингтоном, с другой, приводят к весьма своеобразному заключению. Произвольное распределение средней плотности материи в различных участках вселенной, бесконечность мира, евклидова геометрия в нем и всеобщее значение закона тяготения Ньютона находятся во взаимном противоречии и не дают возможности построить космологию, основанную на этих принципах. Следовательно, пути космологии ведут к тому, чтобы по крайней мере от одного из этих принципов отказаться. Только в том случае, если средняя плотность вещества в мироздании так ничтожна, что ее можно считать равной нулю, пространство может быть бесконечным, евклидовым. Если же, как это более вероятно, так плотность не может быть сведена к нулю, то пространство должно быть конечным, его геометрия должна быть неевклидовой — эллиптической. Нужно быть очень осторожным, делая отсюда заключения. Эйнштейн склоняется к тому, что геометрия нашего пространства эллиптическая. Другие отказываются признать возможным конечный мир, недоумевая, какая может быть речь о конечности всего мироздания. Мы не можем здесь входить в более подробное разъяснение этого. Отсылаем читателя к брошюре Эйнштейна, в которой это в некоторой мере выясняется.[1] Существенно то, что идеи Лобачевского проникли глубоко в учение о строении вселенной: решение вопроса о том, какая геометрия царит в мироздании, составляет основную задачу этой науки.

---

[1] A. Einstein. Geometrie und Erfahrung. Berlin, 1921.

По схеме, сложившейся на базе идей Лобачевского, в настоящее время выполняется обоснование всякой математической дисциплины, вообще всякой дедуктивной науки. Создание неевклидовой геометрии привело к первому завершению одного из основных вопросов теории познания. Неевклидова геометрия получила применение в анализе и в теории функций. По схеме и замыслу Лобачевского строятся теории современной физики, неевклидова геометрия в широком смысле этого слова составляет базу новых, важнейших ее учений. Неевклидова геометрия намечает пути космологии. Все эти сложные вопросы основного значения еще далеки от окончательного разрешения. Но исследования, поиски этого разрешения идут по пути, общее направление которого предуказано Лобачевским. В ходе развития его творения еще отнюдь не сказано последнее слово.

Но совершенно исключительная смелость мысли, доходящая до дерзновения, неотступная твердость в защите своих идей, непоколебимая вера в свою правоту там, где, казалось, все было против него — и вековые устои науки, и непосредственный здравый смысл, — упорная работа, благодаря которой созданная им геометрическая система была доведена до завершения, — все это черты, знаменующие гения первого ранга.

Русская наука выдвинула не мало ученых, проложивших новые широкие пути в естествознании; с величайшим восхищением и гордостью называем мы имена М. В. Ломоносова, П. Л. Чебышева, Д. И. Менделеева, И. П. Павлова; трудно сказать, кому из них принадлежит более высокое место; но мы полагаем, что Н. И. Лобачевский занимает одно из первых мест в этой славной плеяде русских ученых, одно из самых первых мест во всей истории мировой науки.

Очень трудно очертить все развитие, которое получили идеи Лобачевского, исчерпать все применения, которые его творчество получило в математике и в естествознании; трудно охватить всю его многогранную административную и общественную деятельность. Это не достигнуто в настоящем сочинении, многое требует еще выяснения, тщательного исследования.

Но в эти дни, когда исполняется полтораста лет со дня рождения Н. И. Лобачевского, перед нами яркий образ гениального русского ученого, неутомимого администратора и общественного деятеля. Первенец Казанского уни-

верситета, он запечатлел этот образ во всем облике Казани, на ее просвещении, на всей жизни университета. Но неизмеримо выше его творческая роль в области научной мысли, его значение в мировой науке. Лобачевский положил начало широкой эволюции геометрии, которая до него казалась совершенно законченной наукой. На основе его идей геометрия разрослась в огромное здание, в котором классическая геометрия Евклида составляет только фундамент, даже только основной камень в его фундаменте. На базе творения Лобачевского в основном получила разрешение задача об обосновании геометрии Евклида, которая в течение многих веков искала новых путей; на базе его идей развертывается обоснование всех математических дисциплин. Идеи Лобачевского играют руководящую роль в важнейших отраслях естествознания. История науки знает мало имен, мало гениев такого широкого и многогранного творчества.

ВАЖНЕЙШИЕ ДАТЫ ЖИЗНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

*

Все даты указаны по первоисточникам по старому стилю

1793 22 октября ролился.[1]
1802 5 ноября поступил в Казанскую гимназию.
1807 14 февраля переведен в студенты университета.
1811 3 августа получил степень магистра физико-математических наук
1814 6 марта утвержден адъюнктом физико-математических наук и с ближайшего учебного года приступил к чтению различных разделов чистой и прикладной математики (физики в 1819—1820 и 1823—1826 гг., астрономии в 1819—1822 и 1823—1825 гг., статики и динамики в 1825—1827 гг., гидростатики, гидравлики и учения о газах в 1827—1828 гг.).
1816 7 июля утвержден экстраординарным профессором.
1819 в апреле, за выездом проф. Симонова в кругосветное плавание, принимает на себя преподавание астрономии и заведывание астрономической обсерваторией.
1819 16 декабря назначается членом комитета (в котором вскоре и остается в единственном числе) по приведению в порядок библиотеки университета.
1821 выполняет поручение попечителя по покупке в С.-Петербурге для университета астрономических и физических инструментов и книг по математике.
1822 назначается членом (а с 1825 г. и председателем) университетского строительного комитета.
1822 25 февраля избран ординарным профессором (утвержден 24 мая).
1820 19 ноября по июнь 1821 г. и с 31 мая 1823 по август 1825 г. нес, по избранию, должность декана физико-математического факультета.
1825 8 октября избирается исполняющим обязанности библиотекаря университета; 19 февраля 1826 г. утвержден в этой должности и нес ее, даже совмещая с обязанностями ректора, до 22 марта 1835 г.

---

[1] По метрическим записям Алексеевской церкви г. Нижнего Новгорода Лобачевский родился 20 ноября 1792 г.

1826 11 февраля сделал в заседании физико-математического факультета доклад, содержавший изложение основных начал открытой им неевклидовой геометрии.

1827 30 июля утвержден ректором университета; 25 августа вступил в эту должность и непрерывно нес ее до 14 августа 1846 г. (т. е. до назначения помощником попечителя Казанского учебного округа).

1829—1830 опубликовал в журнале «Казанский вестник» мемуар «О началах геометрии», в котором в первый раз появилось в печати изложение неевклидовой геометрии.

1832 16 октября женился на Варваре Алексеевне Моисеевой.

1845 18 апреля вступил в управление округом по случаю перемещения попечителя Мусина-Пушкина в С.-Петербург.

1845 14 августа назначен помощником попечителя Казанского учебного округа.

1855 опубликовал последнюю свою работу «Пангеометрия».

1855 12 ноября уволен от службы по болезни с причислением к министерству.

1856 12 февраля скончался в Казани.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ СОЧИНЕНИЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВУ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО И К НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Первая библиография сочинений, относящихся к учению об основаниях геометрии, к жизни Н. И. Лобачевского и его творчеству, была составлена американским математиком Гальстедом.

H a l s t e d G. B. Bibliography of hyperspace and non-euclidean geometry. Am. J. Math. 1878—1879.

Этот перечень сочинений был воспроизведен во II томе Полного собрания сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского и содержал уже 170 названий. Именно с этого времени количество исследований по основаниям геометрии и по неевклидовой геометрии необычайно быстро растет. Наиболее полная библиография этих сочинений составлена Зоммервилем и доведена до 1910 г.

S o m m e r v i l l e D. M. Y. Bibliography of non-euclidean geometry, including the theory of parallels, the foundations of geometry and space of*n*- dimensions. London, 1911.

Количество названий, вошедших в эту книгу, составляет около 4200, из которых 2400 работ относятся к неевклидовой геометрии и теории параллельных линий, а остальные посвящены *n*-мерной геометрии. После 1910 г. число сочинений по этим вопросам продолжает быстро расти, так что после появления книги Зоммервиля опубликовано около 1500 работ, относящихся к этим вопросам. Отсылая читателей, изучающих неевклидову геометрию специально, к общим справочным и библиографическим сочинениям, мы вынуждены здесь ограничиться весьма небольшим числом сочинений, которые в деле жизнеописания Н. И. Лобачевского и в ходе развития его идей имели наиболее существенное значение.

I. СОБРАНИЯ СОЧИНЕНИЙ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского Изд. Казанского унив. Т. I. Сочинения на русском языке. Казань, 1883, VIII + 550 стр. Т. II. Сочинения на французском и немецком языках. Казань, 1886, 8 + (551 — 680). [Цитируется ниже ПССГ].

2. N. I. Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von F. Engel. Leipzig, 1898, 476 стр. Книга содержит мемуары «О началах геометрии» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» в нем. перев., а также биографию Н. И. Лобачевского. [Цитируется ниже L.-E].
3. N. I. Lobatschefskij. Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem russischen übersetzt mit Anmerkungen von H. Liebmann. Leipzig, 1904, стр. XI+187. [Цитируется ниже L.-L.].
4. Полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, В. В. Степанова, Н. Г. Чеботарева, П. А. Широкова. Главный редактор В. Ф. Каган. Т. I. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Вводные статьи, перевод и комментарии В. Ф. Кагана. О началах геометрии. Вводные статьи и коментарии А. П. Котельникова. М.-Л. 1944. [В печати. Цитируется ниже ПСС].

II. ПЕРЕЧЕНЬ СОЧИНЕНИЙ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

а) Сочинения по геометрии

1. О началах геометрии. Каз. вестн., 1829—1830. [Перепеч. ПССГ, I и ПСС, I. Нем. перев. L.-E]. Отд. издание с примечаниями А. Н. Желтухина. СПб., 1908 [неполный текст].
2. Воображаемая геометрия. Уч. зап. Каз. ун., I, 1835. [Перепеч. ПССГ I]. Франц. текст: Géométrie imaginaire (составленный Н. И. Лобачевским). J. f. reine angew. Math. 17, 1837. [Перепеч. ПССГ, II. Нем. перев. L.-L.]
3. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Уч. зап. Каз. ун:, I, 1836. [Перепеч. ПССГ, I]. Нем. перев.: L.-L.
4. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Уч. зап. Каз. ун., 1835—1838. [Перепеч. ПССГ, I]. Нем. перев. L.-E. Англ. перев. G. B. Halsted, Texas Acad. *2*, 1897. Франц. перев. F. Mallieux, Liège Mém. Soc. Sci. (3), *2*, 1900. Отд. издание с приложением биографического очерка и примечаниями Д. М. Синцова. Харьков, 1912.
5. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, Fincke, 1840; 2-е изд. [фототип. изд.], Berlin, 1887. [Перепеч. ПССГ, II]. Русские переводы: 1. Геометрические изыскания о теории параллельных. Перев. А. В. Летникова. Матем. Сб. III, 1868. 2. Перевод В. Ф. Кагана с вводными статьями и примечаниями в ПСС, I (выходит также отдельным изданием). Франц. перев.: J. Hoüel, Mémoires de la Soc. de Bordeaux, *4*, 1866; отд. изд. Paris, 1866, 1895, 1900. Англ. перев. G. B. Halsted, Austin, 1 и 2-е изд. 1891, 3 и 4-е 1892, 5-е изд. Chicago, Open Court, 1914. Сербский перев. Б. Петроньевича, Белград, 1914.
6. Пангеометрия. Уч. зап. Каз. ун., I, 1855. [Перепеч. ПССГ, I]. Франц. текст: Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des paralléles. Сборник ученых статей, написанных профессорами Казанского университета в память пятидесятилетия его существования. Казань, 1856. [Перепеч. ПССГ, II, а также издательством Hermann в Париже в 1905 г.]. Нем. текст:

Arch. wiss. Kunde von Russland *17*,1858; нем. перев. H. L i e b m a n n, Ostwald's Klassiker *130*, 1902; итал. перев. G. B a t t a g l i n i, Giornale di matematiche *5*, 1867.
7. Геометрия. Изд. Каз. физ.-мат. общ., Казань, 1909.

б) Сочинения по другим разделам математики

1. О резонансе или взаимном колебании воздушных столбов. Каз. вести. *24*, 1828. Реферат работы английского физика Уитстона (W h e a t s t o n e, On the resonances or reciprocated vibrations of columns of air. Quarterly Journal, 1828).
2. Алгебра или исчисление конечных. Казань, 1834.
3. Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на 8. Уч. зап. Каз. ун., I, 1834.
4. Об исчезании тригонометрических строк. Уч. Зап. Каз. Ун., I, 1834.
5. Условные уравнения для движения и положения главных осей обращения в твердой системе. Уч. зап. Моск. ун., 1834.
6. Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значениям функций от весьма больших чисел. Уч. зап. Каз. ун., II, 1835.
7. Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen (О сходимости бесконечных рядов). Приложение к изданию наблюдений метеорологической обсерватории Казанского университета (Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlichen Russischen Universität Kazan, 1841).
8. Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées (О вероятности средних результатов, полученных из повторных наблюдений). J. f. reine angew. Math. *24*, 1842. Напечатано также в J. de math. pures et appliqueés *24*, 1842.
9. Полное затмение солнца в Пензе 26 июня 1842 г. Уч. зап. Каз. ун., 1842. Перепеч. в Журн. Мин. нар. просв., 1843, т. XXXIX.
10. Подробный разбор рассуждения, представленного магистром А. Ф. Поповым под названием «Об интегрировании диференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду», на степень доктора математики и астрономии. Приложение к диссертации А. Ф. Попова, Казань, 1845.
11. О значении некоторых определенных интегралов. Уч. Зап. Каз. Ун., IV, 1852. Нем. перев. Arch. wiss. Kunde von Russland *14*, 1855.

в) Сочинения, не относящиеся к математике

1. Речь о важнейших предметах воспитания, прочитанная 5 июля 1828 г. Каз. вести., авг. 1832.
2. Предисловие к 1-й книжке Уч. зап. Каз. университета. 1834 г.

III. ВАЖНЕЙШИЕ СОЧИНЕНИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ЖИЗНЕОПИСАНИЮ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО И К ЭПОХЕ ЕГО ТВОРЧЕСТВА

П о п о в А. Ф. Воспоминания о службе и трудах профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Уч. зап. Каз. ун., кн. *4* за 1857.
Я н ы ш е в с к и й Э. П. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Казань, 1868. Франц. перев. P o t o c k i, Bull. bibliogr. st. mat. 2, Roma, 1869.
В а с и л ь е в А. В. Николай Иванович Лобачевский. Речь, произн.

во время празднования столетней годовщины дня рождения Лобачевского 22 окт. (1 нояб.) 1893. Казань, 1894.
Вагнер Н. П. Из жизни великого геометра. Журн. «Книжки Недели» СПб, март, 1894.
Воспоминания о Н. И. Лобачевском. Со слов его сына Н. Н. Лобачевского. Историч. вестн. LIX, 1895.
Васильев А. В. Значение Н. И. Лобачевского для Казанского университета. Речь, произн. при открытии памятника Лобачевскому 1(13) сентября 1896. Уч. зап. Каз. ун., X, 1896. Вышло также отдельным изданием.
Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский. СПб, 1914. Русск. Биогр. словарь и отд. издание.
Engel F. N. J. Lobatschefskij. Leipzig, 1898. [L.-E.]
Феоктистов Е. Материалы для истории просвещения в России I. Магницкий. СПб., 1865.
Булич Н. Н. Из первых лет Казанского университета. Казань, I, 1887; II, 1891.
Пинегин М. Казань в ее прошлом и настоящем. СПб., 1890.
Нагуевский Д. И. Казанская гимназия накануне основания Казанского университета. Казань, 1900.
Нагуевский Д. И. Профессор Ф. К. Броннер, его дневник и переписка. Казань, 1902.
Булич Н. Н. Очерки по истории русской литературы и просвещения с начала XIX в. СПб., I, 1902, II, 1905.
Загоскин Н. П. История Казанского университета. Казань, I, 1902; II, 1903; III, 1904; IV, 1906.
Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804—1904) в двух частях под редакцией Н. П. Загоскина. Казань, 1904.

IV. ВАЖНЕЙШИЕ ИЗДАНИЯ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

Euclid (около 300 г. до н. э.) Praeclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi; in artem Geometriae incipit quam foelicissime. Venezia; Erhard Ratdolt. fol. 1482 [первое печатное издание «Элементов»].
Εὐκλείδου στοιχείων Βιβλία ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν. Basel; Joh. Herwag. fol. Ed. by Simon Grynaeus. 1533 [первое издание греческого текста].
Euclidis quae supersunt omnia. Ex recensione Davidis Gregorii. Oxoniae, 1703. [Так называемое оксфордское издание].
Simson R. The Elements of Euclid. Glasgow, 1756. [Первое издание «Начал», приспособленное для преподавания в школе. Содержит книги I—VI, XI и XII. Выдержало много переизданий.]
Les oeuvres d'Euclide en grec, latin et français. Edités par F. Peyrard. Paris, 1814—1818. [Так называемое парижское издание, содержит греческий текст и переводы на латинский и французский языки].
Euclidis opera omnia. Ed. et latine interpretati sunt I. L. Heiberg et H. Menge. Leipzig, 1883—1896.
The thirteen books of Euclid's Elements. 3 vols. Editor T. L. Heath. Cambridge, 1908.
Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Editi da F. Enriques col concorso di diversi collaboratori. Bologna, 1925—1932.

Эвклидовых начал восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии. Перевод с греческого Ф. Петрушевского с прибавлениями и примечаниями. СПб., 1819.

Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями М.Е. Ващенко-Захарченко. Киев, 1880.

Riccardi. Saggio di una bibliografia Euclidea. Memorie del Acc. sc. Bologna, 1887, 1889, 1893. [Обстоятельная библиография изданий «Начал», комментариев к ним и пр. Подробный список изданий «Начал» можно найти также в издании «Начал» Ващенко-Захарченко.]

V. ПРЕДИСТОРИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Saccheri G. (1667—1733). Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Milano, 1733. Нем. перев. в сочинении Stäckel, Urkundensammlung. (см. ниже).

Lambert J. H. (1728—1777). Theorie der Parallellinien. Leipziger Mag. f. r. ang. Math., 1786. Перепеч. в сочинении Stäckel, Urkundensammlung.

Legendre A. M. (1752—1833). Eléments de géométrie. Paris, 1794; 2 ed. 1796; 3 ed. 1808; 9 ed. 1812; 12 ed. 1823. — Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Paris, Mém. Acad. sc. Inst. *12*, 1833 Русск. перев. «Начальные основания геометрии» появился в 1819 г.

Schweikart F. K. (1780—1859). 1. Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig und Jena. 1807. Перепеч. в сочинении Stäckel, Urkundensammlung. — Письма к его племяннику Тауринусу (1820—1824). В сочинении Stäckel, Urkundensammlung.

Taurinus F. A. (1794—1874). Переписка с Гауссом. 1824. Gauss, Werke, VIII, 1900.

Taurinus F. A. Theorie der Parallellinien. Köln, 1825. Geometriae prima elementa. Köln, 1826.

Bolyai J. (1802—1860). 1. Письма к отцу от 3 ноября 1823 г. Факсимиле с латинским переводом в J. Bolyai in memoriam, Klausenburg, 1902. На нем. язык перевел Stäckel, в I т. его W. u. J. Bolyai, стр. 241 (см. ниже).

— Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens. Приложение к сочинению его отца: Tentamen, 1832. Нем. перев. в сочинении Stäckel, Bolyai, II (см. ниже); франц. перев. H. Hoüel, Paris, 1867, 3-е изд., 1911.

Васильев А. В. Иезуит Саккери, итальянский предшественник Лобачевского. Казань, Изв. Физ.-мат. общ. (2), *3*, 1893.

Halsted G. B. Non-euclidean geometry, historical and expository, Amer. Math. Monthly, 1 (1894) — 5 (1898).

Stäckel P. u. Engel F. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Leipzig, Teubner. 1895. Supplement in Bibl. Math., Stockholm (2), *13*, (1899), 47—48. Библиография сочинений по теории параллельных 1482—1837; переводы и перепечатка работ Wallis, Saccheri, Lambert, Gauss и Taurinus. Цитируется как Stäckel, Urkundensammlung.

— Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen (Urkunden zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie, II. 2 Teile. Leipzig, Teubner, 1913, I. Leben und Schriften der beiden Bolyai. Стр. XII + + 281. II. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Стр. VII + 274).

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Heft V. C. F. Gauss als Geometer. Leipzig, Teubner, 1918.

Gauss C. F. Werke. Bd. VIII, 1900. Переписка с Бесселем, Больай, Энке, Герлингом, Ольберсом, Шумахером, Струве, Тауринусом, а также фрагменты по началам неевклидовой геометрии.

Bonola R. La geometria non-euclidea; exposizione storico-critico del suo sviluppo. Стр. VI + 213, Bologna, 1906, Русск. перев.: А. Р. Кулишера-Бонола Р. Неевклидова геометрия. СПб., 1910.

Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. II. Исторический очерк развития учения об обоснованиях геометрии. Одесса, 1907.

Dehn M. Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung— в сочинении Pasch M. u. Dehn M., Vorlesungen über neuere Geometrie. Berlin, 1926.

VI. ДОСТУПНЫЕ ИЗЛОЖЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Frischauf J. Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig, 1876.

Ball R. S. The non-euclidean geometry. Dublin, 1879.

Simon M. Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Strassburg. Стр. IV + 74.1890.

— Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Leipzig — Berlin. Стр. XVIII + 115 (посмертное издание). 1925.

Mansion P. Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne. Mathesis, Gand (2), *1*, 1891; Suppl. *1*, 32 стр.

Mélanges mathématiques (III. Géométrie euclidienne et non euclidienne). Paris, стр. IV + 160 + 56, 1898.

Каган В. Ф. Очерк геометрической системы Лобачевского. Одесса, 1900.

Barbarin B. La géométrie non euclidienne. Paris, 79 стр., 1902; 2-е изд., 92 стр., 1907.

Liebmann K. O. H. Nicht-euklidische Geometrie. Leipzig, стр. VIII + 245, 1905; 2-е изд., стр. 6 + 222, 1912; 3-е изд., стр. 150, 1923. Berlin.

Young, J. W. Lectures on fundamental concepts of algebra und geometry. стр. VIII + 247, New-York, 1911. Итал. перев. Mercogliano, Napoli, 1919.

Sommerville M. Y. The elements of non-euclidean geometry, стр. XVI + 274, 1914. London.

Turc A. Introduction élémentaire à la géométrie Lobatschewskienne. Ouvrage posthume, publié d'après les notes de l'auteur. Стр. 170, 1914. Genève.

Лукьяниченко С. Пространство Лобачевского — Больай. Ч. I—II, 160 стр. 1914—1915. Харьков.

Успенский Я. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского— Больай. Петроград, 177 стр., 1922.

Baldus R. Nichteuklidische Geometrie. Hiperbolische Geometrie der Ebene. Leipzig und Berlin, 1927. Русск. перев. Н. В. Ефимова под ред. Г. Б. Гуревича. Бальдус Р. Неевклидова геометрия. 147 стр., М.—Л. 1933.

VII. ОБСТОЯТЕЛЬНЫЕ ИЗЛОЖЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Killing, W. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig. Стр. VI+264, 1885.

Hausdorff, F. Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. Leipzig; Ber. Ges. Wiss. *51*, 1899.

Coolidge, J. L. The elements of non-euclidean geometry. 291 стр., Oxford. 1909.

Mac Leod, A. Introduction à la géométrie non-euclidienne. 433 стр., Paris. 1922.

Klein F. Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin, 1928. Русск. перев. Н. К. Брушлинского. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М. — Л., 355 стр., 1936.

Schilling F. Projektive und nicht-euklidische Geometrie. Bd. II. Leipzig u. Berlin, 210 стр., 1933.

VIII. ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ В ХОДЕ РАЗВИТИЯ ИДЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

Riemann G. F. B. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen, Abh. Ges. Wiss. *13*, 1866; Berlin, 1919, 2-е изд. 1921, 3-е изд. 1923. Русск. перев. Д. М. Синцова в сб. «Об основаниях геометрии». Казань, 1893.

Cayley A. A sixth memoir upon quantics. London, Phil. Trans. R. Soc. 149, 1859, Collected Math. Papers, II.

—On the non-euclidean geometry. Math. Ann. *5*, 1872.

Clifford W. K. Analytical metrics. Q. J. Math., *7*, 1865; *8*, 1866, Math. Papers, 80—109.

— On the theory of distances. Report Brit. Assoc. *39*, 1869.

— Preliminary sketch of biquaternions. London, Proc. Math. Soc. *4*, 1873. Русск. перев. А. Р. Кулишер, СПб., 1910.

Beltrami E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giorn. mat. Napoli, *6*, 1868. Opere mat. I, 374—485.

— Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Ann. mat., 406—429; на русск. язык перев. П. Мей, Казань, Извест. Физ.-мат. общ. (2), *3*, 1893. Приложение.

Helmholtz H. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingener Nachrichten *14*, 1868. Перепеч. в Wiss. Abh. II. Русск. перев. А. В. Васильева в сб. «Об основаниях геометрии». Казань, 1893.

Klein F. Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Math. Ann. *4*, 1871; *6*, 1873; Gesammelte math. Abh. I, 1921.

— Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlanger Programm). 1872. Перепечат. в Math. ann. *43*, 1893. Русс. перев. Д. М. Синцова, Изв. физ.-мат. общ. *5*, 1895—6, Казань. Выпущен также отдельным изданием.

—Zur nicht-euklidischen Geometrie. Math. Ann. *37*, 1890.

Poincaré H. Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. Bull. Soc. math, *15*, 1887, Paris.

— Les géométries non-euclidiennes. Paris. Rev. gen. sci. *2*, 1891.

Barbarin, P. J. Géométrie générale des espaces. C.-R., Ass. Franç. avanc. sci *27*, 1898, Nantes.
— Etudes de géométrie analytique non-euclidienne. Bruxelles, Mém. cour. sav. étr. Acad. *8*, 60, 1901. Также отдельно, Paris: Naud.
Whitehead A. N. A treatise on universal algebra, with applications. Vol. 1 (больше не было опубликовано). Стр. XXVI + 586, 1898, Cambridge.
Hilbert D. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Math. Ann. *57*, 1903. Перепеч. в виде III приложения к его сочинению «Grundlagen der Geometrie».
Liebmann H. Ueber Begründung der hiperbolischen Geometrie. Math. Ann. *59*, 1904.
— Hyperbolische Raumgeometrie. Münchener Berichte, 1922.
Eisenhart L. P. u. Veblen O. The Riemann geometry and its generalization. Washington. Proc. Nat. Acad. Sci. *8*, 1922.

IX. ОБЩИЕ СОЧИНЕНИЯ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig. 3 тома, 1888—1893. Особенно Bd. III, Abt. V., Kap. 20—24. Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, стр. 393—543. Этот том был удостоен первой премии имени Лобачевского в 1897 г.
—Ueber die Grundlagen der Geometrie. Leipzig. Ber. Ges. Wiss. *42*, 1890.
Peano, G. I principii di geometria logicamente esposti. Torino, 1889.
— Sui fondamenti della geometria. Torino. Riv. mat. *4*, 1894.
Veronese, G. Fondamenti di geometria a piû dimensioni ed a piû spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova. Стр. XVII + 628, 1891. Нем. перев. Schepp. Leipzig, 1894.
Killing. Ueber die Grundlagen der Geometrie. Berlin, J. Math. 109, 1892.
—Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Paderborn, F. Schöningh. 2 тома 1893, 1898. Удостоена премии им. Лобачевского в 1900 г.
Hilbert D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 92 стр., 1899; 7-е изд. 1930 (значительно переработ. с 10 прилож.). Русск. перев. А. В. Васильева.—Д. Гильберт, «Основания геометрии». СПб., 1923.
Enriques F. Questioni riguardanti la geometria elementare, trattate da U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques, G. Vitali, ecc. Bologna: Zanichelli. 1900. Нем. перев., 1. Die Grundlagen der Geometrie. Leipzig. Teubner, 1911.
— Principien der Geometrie. Encykl. math. Wiss., III, A, B, *1*, 1907. (Франц. изд. F. Meyer, III, 1, 1911).
Schur F. H. Ueber die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann., *55*, 1901.
— Grundlagen der Geometrie. Leipzig, Teubner, стр. X + 192, 1909.
Vahlen K. T. Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie. Leipzig, стр. XII + 302, 1905.
Veblen O. The foundations of geometry: Young T. W. A. Monographs on topies of modern mathematics relevant to the elementary field. New-York, 1911.
Богомолов С. Вопросы обоснования геометрии. М. 243 стр., 1913.
— Основания геометрии. М.—Петроград, 330 стр., 1923.
Baker H. F. Principles of Geometry, vol. 1. Foundations, стр. XI + + 182, 1922; vol. 2. Plane geometry, conics, circles, non-euclidean geometry, стр. XV + 243, 1922; vol. 3. Solid geometry, quadrics,

cubic curves in space, cubic surfaces, стр. XIX + 228, 1923. Cambridge.
Poincaré H. Des fondements de la géométrie. Paris, 1923.
Pasch M. u. Dehn M. Vorlesungen über neuere Geometrie. Berlin, стр. X + 275, 1926.
Hessenberg G. Grundlagen der Geometrie. Berlin u. Leipzig, 143 стр., 1930.
Reidemeister. K. Vorlesungen über die Grundlagen der Geometrie. Berlin. 1930.
Mohrmann H.Einführung in die nichteuklidische Geometrie. Berlin. 1930.
Godeaux L. Les géometries. Paris, 1937.
Baldus R. Zur Axiomatik der Geometrie. Пять мемуаров, из них важнейшие: I — Math. Ann. *100*, 1928; III — Sitzungsberichte Heidelberger Akad., 1930; V — Sitzungsberichte der Bayerischen Akad., 1937.
Об основаниях геометрии. Сборник статей, выпущенный Казанским физико-математическим Обществом в 1893 г.

X. РАБОТЫ ПО ОБОСНОВАНИЮ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Veblen O. A system of axioms for geometry. Trans. Am. Math. Soc. *5*, 1904.
Каган В. Ф. Основания геометрии. I. Опыт обоснования евклидовой геометрии. Одесса, 1905.
Halsted G. B. Rational geometry. New-York, 2-е изд., стр. VIII + 273, 1907.
Huntington E. V. u. Kline J. R. Sets of independent postulata for betweens. Trans. Am. Math. Soc. *18*, 1917.
Huntington E. V. A new set of postulats for betweens with proof of complete independence. Trans. Am. Math. Soc. *26*, 1924.
Forder H. G. The foundations of euclidean geometry. Cambridge, стр. XII + 349, 1927.

В этот отдел могут быть включены некоторые сочинения, отнесенные к предыдущему отделу, а именно: Пеано (Peano), Гильберта (Hilbert), Гессенберга (Hessenberg), Бекера (Baker), Рейдемейстера (Reidemeister), Паша (Pasch) и Богомолова.

XI. ВАЖНЕЙШИЕ РАБОТЫ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯМ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ К МЕХАНИКЕ, ФИЗИКЕ И КОСМОЛОГИИ

Tilly, J. M. Etudes de mécanique abstraite. Bruxelles, Mém. cour. sav. étr. Acad. *8*, 21, 1870.
—Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique. Bordeaux, Mém. Soc. sci. phys nat. (2), *3*, 1879.
Ball K. Certain problems in the dynamics of a rigid system moving in elliptic space. Dublin, Trans. R. Irish Acad *28*, 1882.
Minkowski H. Raum und Zeit. Leipzig, стр. IV + 14, 1909; Jahresber. Math. Ver. *18*, 1909. Перепеч. в сб. «Das Relativitätsprinzip»; eine Sammlung von Athandlungen von Lorentz, Einstein und Minkowski. Leipzig: Teubner, 1913, 4 Aufl., 1922. Русск. перев. А. В. Васильева, Изв. Физико-мат. общ., Казань (2), *16*, 1910.
Varičak. Интерпретација теорије релативности у геометрји Лобачевского. Belgrad, Glas srpske Kralj. Akad. *83*, 1911. Phys. Zs., *11*, 1910, Jahresber. D. Math-Ver. *21*, 1912.

Robb A. A. A theory of time and space. Cambridge: Heffer, 16 стр., 1913; Cambridge, стр. VI + 373, 1914.
Einstein A. Die Grundlagen der allegemeinen Relativitätstheorie. An. Phys. *49*, 1916; вышло также отдельным изданием. Русск. перев. в сборнике Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн, Минковский. Л. 1935.
Weyl H. Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Springer. 1918. 5 Aufl., стр. VIII + 338, 1923.
Eddington A. S. The mathematical theory of relativity. Cambridge, Univ. Press., 1923. Нем. перев. Berlin. 1924. Русск. перев: А. С. Эддингтон. Теория относительности, Л.-М., 1934. Обширная библиография.
Фридман А. А. и Фредерикс В. К. Теория относительности, ч. I. Л., 1923.
Котельников А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сб. «In memoriam N. I. Lobatschevskiĭ», II, Казань, 1927.
Tolman R. C. Relativity, thermodynamics and cosmology. Oxford, 501 стр., 1934.
Котельников А. П. Проективная теория векторов. Изв. Каз. Физ.-мат. общ. (2), VIII и IX; вышло также отдельное издание, Казань, 1899, обширная библиография.

ПЕРЕЧЕНЬ ИЛЛЮСТРАЦИЙ

НА ОТДЕЛЬНЫХ ЛИСТАХ [1]

1. *Н. И. Лобачевский.* По портрету работы Л. Крюкова (?) 40-х годов XIX века . . . . . *(фронтиспис)*
2. *Вид г. Казани.* Гравюра 30-х годов XIX в. работы В. Турина . . . . . 16 — 17
3. *Н. И. Лобачевский.* Портрет работы В. Л. Щеголькова 20-х годов XIX века. (Собрание геометрического кабинета Казанского Государственного университета). 80 — 81
4. *Факсимиле представления Лобачевского (Exposition Succincte)* . . . . . 136—137
5. *Казанский университет.* Гравюра 30-х годов XIX в. работы В. Турина . . . . . 208—209
6. *Дом, принадлежавший Лобачевскому, на Проломной ул.* (ныне ул. Баумана). (В настоящее время не существует) 240—241
7. *Надгробный памятник на могиле Лобачевского* . . . . . 248—249
8. *Н. И. Лобачевский.* Бюст работы М. Л. Диллон (Актовый зал Казанского Государственного университета) . . . 304 — 305

В ТЕКСТЕ

1. *Конспект Н. И. Лобачевского работы Гаусса «Теория движения небесных тел»* 49
2. *Страница из черновых рукописей Н. И. Лобачевского по геометрии* 57
3. *Факсимиле из рукописи Н. И. Лобачевского «Геометрия».* Первая страница 81
4. *Факсимиле из рукописи Н. И. Лобачевского «Геометрия».* 23 страница 85
5. *Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследований по теории параллельных линий»* 137
6. *Титульный лист отдельного издания «Воображаемой геометрии».* 197

[1] Воспроизводятся по фотокопиям, предоставленным засл. деят. искусств П. М. Дульским (Казань).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Введение 5

ДЕТСКИЕ И СТУДЕНЧЕСКИЕ ГОДЫ

I. Детские и школьные годы 9
II. Открытие Казанского университета и вступление в него Лобачевского. 21
III. Студенческие годы. 26

ДО ОТКРЫТИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

IV. Первые шаги Лобачевского в его научной и педагогической деятельности. 46
V. Первые успехи казанской математической школы 52
VI. Эпоха Магницкого. 59
VII. Учебное руководство «Геометрия» 78
VIII. Евклид, Даламбер, Лежандр и русские авторы учебников по геометрии 87
IX. Обзор сочинения «Геометрия». 99

СОЗДАНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

X. Падение Магницкого. Основной доклад Лобачевского . . 108
XI. «Начала» Евклида 115
XII. Учение о параллельных линиях от Евклида до Лежандра 121
XIII. «Exposition succincte» и «Geometrische Untersuchungen» (Начала неевклидовой геометрии). 133

ГОДЫ ТВОРЧЕСКОГО РАСЦВЕТА. АДМИНИСТРАТИВНАЯ И ОБЩЕСТВЕННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

XIV. Первый период руководства университетом 156
XV. Мемуар «О началах геометрии» 155
XVI. Критики. 184
XVII. Мемуары «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». . . 194

XVIII. Второй период управления университетом.. 203
XIX. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» 214
XX. Сочинения, не относящиеся к геометрии. 229

ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ЖИЗНИ

XXI. Уход из университета 238
XXII. Семейная жизнь. «Пангеометрия». Кончина Лобачевского 242

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ДО И ПОСЛЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

XXIII. Возрождение идей Лобачевского. (К 70-летию со дня его рождения) 249
XXIV. Предистория неевклидовой геометрии. 256
XXV. Интерпретации неевклидовой геометрии (К столетию со дня рождения Лобачевского). 282
XXVI. Обоснование геометрии (К 125-летию со дня рождения Лобачевского) 313
XXVII. Приложения неевклидовой геометрии к механике, физике и космологии (к 150-летию со дня рождения Лобачевского) 317

Приложения

Важнейшие даты жизни Н. И. Лобачевского. 333
Библиографический указатель 335
Перечень иллюстраций 347

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета АН СССР за № 2225

Редакторы издательства
А. Е. Гайсинович и М. Г. Шестопал

Л60004. Подп. в печ. 1/VI 1944 г. Печ. л. 21,75 + 8 вклеек. Уч.-изд. л. 20. Тираж 5 000.
Цена 12 руб., переплет 3 руб.

1-я Образцовая тип. треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при СНК РСФСР. Москва, Валовая, 28.
Заказ № 338.

Художественное оформление книги выполнили художники
И. А. Седельников и Н. М. Лобанов

1842